COORDINACIÓN EDUCATIVA Y CULTURAL CENTROAMERICANA

Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica

Nociones de Aritmética y Geometría para el Maestro en Formación

CECC/SICA
Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana

Analida I. Ardila A.
Guadalupe Tejada de Castillo
Egbert Agard White

VOLUMEN 24

372.7
A676n Ardila A., Analida I.

Nociones de aritmética y geometría para el maestro en formación/ Analida I. Ardila A., Guadalupe Tejada de Castillo, Egbert Agard White. – 1ª. ed. – San José, C.R. : Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA, 2009.

140 p. : il. ; 28 x 21 cm. – (Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Básica; n. 24)

ISBN 978-9968-818-71-1

1. Aritmética - Estudio y enseñanza. 2. Geometría - Estudio y enseñanza.I. 3. Capacitación de docentes. I. Tejada de Castillo, Guadalupe. II. Agard White, Egbert. III. Título.

CRÉDITOS

La elaboración y publicación de esta colección fueron realizadas con la contribución económica del Gobierno de los Países Bajos, en el marco del **Proyecto Consolidación de las Acciones del Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica, CECC/SICA**

María Eugenia Paniagua Padilla
Secretaria General de la CECC/SICA

Juan Manuel Esquivel Alfaro
Director del Proyecto

Analida I. Ardila A.
Guadalupe Tejada de Castillo
Egbert Agard White
Autoras del Texto.

Olga González Dobles
Revisión y Asesoría del Contenido

Madelein Mainez Phillips
Revisión Filológica

Mario Pineda Falconett
Diagramación e Ilustración del Texto

Arnobio Maya Betancourt
Coordinador y Asesor de la 1ª Edición Final y de la Reimpresión

Impresión Litográfica
Editorama, S.A.

Para la impresión de esta 2ª. edición, (1ª. aún para el registro del ISBN) se ha respetado el contenido original, la estructura lingüística y el estilo utilizado por las autoras, de acuerdo con un contrato firmado para su producción por éstas y la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, CECC/SICA.

PRESENTACIÓN

A finales del año 2002 y comienzos del 2003, así rezan los respectivos colofones, **la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana, (CECC/SICA),** publicó y entregó treinta y seis interesantes obras que estructuraron la **Colección Pedagógica Formación Inicial de Docentes Centroamericanos de Educación Primaria o Básica.**

Dichas publicaciones se originaron en el marco del **Proyecto Apoyo al Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica,** el que se generó y se puso en ejecución, merced al apoyo que ha brindado la Cooperación Internacional del Gobierno Real de los Países Bajos.

Para desarrollar dichas obras, la CECC/SICA realizó una investigación diagnóstica en los países que forman parte orgánica de la institución, la cual permitió identificar, con mucha claridad, no sólo las temáticas que serían abordadas por los autores y autoras de las obras de la Colección, sino también las estrategias que debían seguirse en el proceso de diseño y producción de la misma, hasta colocar los ejemplares asignados en cada uno de los países, mediante sus respectivos Ministerios o Secretarías de Educación.

Los mismos materiales trataron de responder a los perfiles investigados de los formadores y de los maestros y de las maestras, así como a los respectivos planes de estudio.

Como podrá visualizarse en la información producida en función del Proyecto, cuyo inicio se dio en Diciembre de 1999, los programas que se han implementado en el marco del mismo son los siguientes:

1º. Desarrollo del perfil marco centroamericano del docente de Educación Primaria o Básica para mejorar el currículo de formación inicial de docentes.

2º. Mejoramiento de la formación de formadores de docentes para la Educación Primaria o Básica.

3º. Producción de recursos educativos para el mejoramiento del desarrollo del currículo de formación inicial de docentes de la Educación Primaria o Básica.

4º. Innovaciones pedagógicas.

5º. Investigación Educativa.

La Colección publicada y distribuida, a la que aludimos, pretende ofrecer a los países obras didácticas actualizadas e innovadoras en los diferentes temas curriculares de la Educación Primaria o Básica, que contribuyan a dotar de herramientas estratégicas, pedagógicas y didácticas a los docentes Centroamericanos para un eficaz ejercicio de su práctica educativa.

Después de publicada y entregada la Colección a los países destinatarios, la CECC/SICA ha hecho el respectivo seguimiento, el cual muestra el acierto que, en alta proporción, ha tenido la organización, al asumir el diseño, la elaboración, la publicación y su distribución.

Basada en estos criterios, es como la CECC/SICA y siempre con el apoyo de la Cooperación Internacional del Gobierno Real de los Países Bajos, ha decidido publicar una segunda edición de la colección (36 volúmenes) y a la cual se le suma un nuevo paquete de 14 volúmenes adicionales, cuya presentación de la 1ª edición se hace en éstos, quedando así constituida por 50 volúmenes.

Nuevamente presentamos nuestro agradecimiento especial al Gobierno Real de los Países Bajos por la oportunidad que nos brinda de contribuir, con esta segunda edición de la Colección, a la calidad de la Educación Primaria o Básica de la Región Centroamericana y República Dominicana.

MARIA EUGENIA PANIAGUA
Secretaria General de la CECC/SICA

PRESENTACIÓN DE LA PRIMERA EDICIÓN

En los últimos años, la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana (CECC) ha venido ejecutando importantes proyectos que, por su impacto y materia, han complementado los esfuerzos ministeriales por mejorar y modernizar la Educación . Los proyectos de más reciente aprobación, por parte del Consejo de Ministros, están direccionados a enfrentar graves problemas o grandes déficits de los sistemas educativos de nuestra región. Este es el caso del Proyecto **" Apoyo al Mejoramiento de la Formación Inicial de Docentes de la Educación Primaria o Básica"**, cuyo desarrollo ha conducido a una exhaustiva revisión de los diversos aspectos relacionados con la formación de los maestros. Sus resultados son evidentes en cada país y con ello la CECC cumple su finalidad de servir cada vez mejor a los países miembros.

En este caso, ha de recordarse que este valioso proyecto es el producto de los estudios diagnósticos sobre la formación inicial de docentes ejecutados en cada una de las seis repúblicas centroamericanas en el año 1996, los cuales fueron financiados con fondos donados por el Gobierno de los Países Bajos. Entre las conclusiones y recomendaciones formuladas en el Seminario Centroamericano, una de las actividades finales del estudio indicado, el cual fue realizado en Tegucigalpa, Honduras, en septiembre de ese mismo año, los participantes coincidieron plenamente en poner especial atención a la formación de los formadores y en promover la "tercerización" de la formación de los maestros donde no existiere. También, hubo mayoría de opiniones sobre la necesidad de establecer perfiles del formador y de los maestros y respecto a la actualización de los respectivos planes de estudio. Por consiguiente, es apropiado afirmar que el contenido de este proyecto, orientado a mejorar la formación inicial de docentes, se sustenta en los seis diagnósticos nacionales y en el informe regional que recoge los principales resultados del Seminario Regional y la información más útil de los informes nacionales.

Como consecuencia del trabajo previo, explicado anteriormente, y de las conversaciones sostenidas con los funcionarios de la Embajada Real sobre los alcances y el presupuesto posible para este proyecto, finalmente se aprobó y dio inicio al mismo en diciembre de 1999 con los siguientes programas:

1. **Desarrollo del perfil marco centroamericano del docente de Educación Primaria o Básica para mejorar el currículo de formación inicial de docentes.** Con base en este perfil se construyeron los perfiles nacionales, los que sustentaron acciones de adecuación de los currículos de formación inicial de docentes en cada país.
2. **Mejoramiento de la formación de formadores de docentes para la Educación Primaria o Básica.** Con el propósito de definir perfiles académicos de los formadores de docentes que den lugar a planes de estudio de grado y de postgrado.
3. **Producción de recursos educativos para el mejoramiento del desarrollo del currículo de formación inicial de docentes de la Educación Primaria o Básica.** Dirigido a editar obras bibliogáficas y a producir materiales interactivos que se empleen en las aulas de formación de maestros.
4. **Innovaciones pedagógicas.** Consistente en poner en práctica y evaluar innovaciones pedagógicas en el campo de la formación inicial y en servicio de docentes.
5. **Investigación Educativa.** Desarrollo de investigaciones sobre temas dentro de la formación inicial de los docentes del Nivel Primario.

Es oportuno destacar cómo la cooperación financiera y técnica del Gobierno de los Países Bajos, a través de su Embajada Real en San José, Costa Rica, ha sido no solo útil a los Ministerios de Educación del Área, por centrarse en uno de los factores determinantes de la calidad de la Educación, sino también porque ha permitido, en dos momentos, completar una propuesta de trabajo que ha impactado y que ha abierto nuevas vertientes de análisis y reflexión de la formación inicial de docentes para la Educación Primaria.

Con esta Presentación se quiere exaltar la importancia y trascendencia del Programa 3, en el que se enmarca la elaboración de las obras bibliográficas, orientadas a solventar, en alguna medida, la falta de disponibilidad de textos referenciales de actualidad en el campo educativo, que contribuyan a elevar la calidad de la formación profesional de los maestros y la de sus formadores, donde ello sea una necesidad. Además, de que la colección se pone en manos de quienes forman educadores para la Educación Primaria y de los estudiantes de pedagogía. Todo esto es producto del conocimiento y la experiencia de profesionales centroamericanos que han consagrado su vida a la educación y al cultivo de los diversos saberes. Llegar a la definición de las obras y sus títulos fue un largo y cuidadoso proceso en el que intervinieron diversos profesionales de la región, de acuerdo con el concurso establecido y publicado para tales efectos.

Es importante apuntar que las obras que integran esta colección de valor incalculable, cubren los principales temas curriculares y técnico-pedagógicos que deben acompañar a un adecuado proceso de formación inicial de docentes. Por ello, van desde los temas fundamentales de Educación, el Currículo, Ejes Transversales, la Didáctica, la Evaluación, la Supervisión y Administración Educativa, hasta temas metodológicos y estratégicos específicos relacionados con el conocimiento teórico y con la enseñanza de las Ciencias Sociales, la Matemática, las Artes, el Lenguaje, las Ciencias Naturales y la Investigación Educativa. En su elaboración se siguió un proceso de amplia participación, dentro del cual se recurrió a jueces que analizaron las obras y emitieron sus comentarios y recomendaciones enriquecedores en algunos casos y correctivos en otros. En este proceso, los Ministerios de Educación de la región tuvieron un papel fundamental al promover dicha participación.

Esta Secretaría General considera que la rica colección, por la diversidad temática, visión y actualidad, es un aporte sustantivo, muy visible, manejable y de larga duración, que el Gobierno de los Países Bajos, a través de la CECC, le entrega gratuitamente a las instituciones formadoras de educadores y a las dependencias de los Ministerios de Educación, encargadas de este campo. Del buen uso que hagan formadores y formados del contenido de esta colección de obras, va a depender, en definitiva, que el esfuerzo de muchos profesionales, realizado en el marco de la CECC, genere los resultados, el impacto y las motivaciones humanas y profesionales de quienes tendrán en las aulas centroamericanas el mayor tesoro, la más grande riqueza de nuestras naciones: las niñas y los niños que cursan y cursarán la Educación Primaria. El aporte es objetivo. Su buen uso dependerá de quienes tendrán acceso a la colección. Los resultados finales se verán en el tiempo.

Finalmente, al expresar su complacencia por la entrega a las autoridades de Educación y al Magisterio Centroamericano de obras tan valiosas y estimulantes, la Secretaría General resalta la importancia de las alianzas estratégicas que ha logrado establecer la CECC, con países y agencias cooperantes con el único espíritu de servir a los países del Área y de ayudar a impulsar el mejoramiento de la educación en los países centroamericanos. En esta ocasión la feliz alianza se materializó gracias a la reconocida y solidaria vocación de cooperación internacional del Gobierno de los Países Bajos y, particularmente, a los funcionarios de la Embajada Real, quienes con su apertura, sensibilidad y claridad de sus funciones hicieron posible que la CECC pudiese concluir con tanto éxito un proyecto que nos deja grandes y concretas respuestas a problemas nuestros en la formación de maestros, muchas enseñanzas y deseos de continuar trabajando en una de las materias determinantes para el mejoramiento de la calidad de la Educación.

MARVIN HERRERA ARAYA
Secretario General de la CECC

INTRODUCCIÓN

Con el deseo de participar en el proyecto: "Apoyo al Mejoramiento de la Formación inicial del Docente de la Educación Primaria o Básica", que se realiza bajo la Coordinación Educativa y Cultural Centroamericana (CECC), presentamos este libro cuyo propósito es el de contribuir a la formación inicial en Matemática del maestro de la región centroamericana.

Para el desarrollo de los temas se consideró como premisa la idea de que el docente aprende mejor un concepto, específicamente uno matemático, con el desarrollo de actividades que le permitan aproximarse a la abstracción a partir de situaciones en contexto, y mediante la construcción del conocimiento. Los docentes aprenden a hacer bien aquello que practican, es decir, si se desea que ellos apliquen los conceptos en otras situaciones, entonces, deben aprender en situaciones similares.

Las áreas de Matemática tratadas son Aritmética y Geometría, ya que en cualquier currículo de estudio de la Educación Primaria de la región centroamericana o de cualquier país del mundo, son áreas básicas que permiten explicarnos la armonía del universo y la belleza de las formas, así como resolver problemas en situaciones muy variadas. Se consideró el estudio de algunos temas de estas áreas en las que los estudiantes presentan mayores dificultades de aprendizaje, con el propósito de ofrecerle al docente de primaria, un enfoque didáctico, que le permita fortalecer su aprendizaje en esos temas y enriquecer el proceso de enseñanza de los mismos.

Los temas tratados en el área de Aritmética se estudian a través de cuatro capítulos: LOS NÚMEROS NATURALES Y SUS USOS, SISTEMAS DE NUMERACIÓN, INTERPRETACIÓN Y OPERACIONES CON FRACCIONES y RAZONES Y PROPORCIONES. El área de Geometría se estudia en el quinto capítulo: PERÍMETRO Y ÁREA: EL CONFLICTO ENTRE DOS CONCEPTOS.

Al inicio de cada capítulo, se presenta una reseña histórica del tema que se tratará, con el fin de que el docente conozca el origen y evolución de los conceptos estudiados y brindarle mayores recursos para su aprendizaje y enseñanza. Además, se exponen algunos resultados de investigaciones sobre problemas que se presentan en la formación matemática del docente o sobre dificultades de los estudiantes en el aprendizaje de la misma. Este conocimiento le permite al docente, el ajuste de las recomendaciones señaladas, de acuerdo con sus propias necesidades y con la realidad que enfrente. Seguidamente se presentan las actividades de aprendizaje, las cuales han sido cuidadosamente diseñadas atendiendo las premisas planteadas. Al final de cada capítulo, se proponen actividades de evaluación del aprendizaje y se dan sugerencias para la solución de los problemas propuestos, con el objetivo de que el docente valore su aprendizaje y reciba una retroalimentación.

En el Capítulo I sobre LOS NÚMEROS NATURALES Y SUS USOS se considera, tal como lo afirma Jean Piaget, la necesidad de un soporte real, un contexto como vía de acceso a la noción de número y a las operaciones aritméticas básicas. Se estudia la aparición de un nuevo cardinal como el siguiente o sucesor de un ordenamiento natural, por lo que se presta atención a la representación gráfica de los números naturales, enfatizando en la comparación y orden de estos números; también se ve el uso ordinal de los números. Los múltiplos y divisores de un número natural son estudiados como preámbulo para la descomposición única de un número en sus factores primos y la presentación y uso de los conceptos de mínimo común múltiplo y máximo común divisor.

El sistema de numeración decimal se presenta en el Capítulo II, que trata sobre los SISTEMAS DE NUMERACIÓN, considerando las ventajas que representa el uso de este sistema de numeración de base diez. Se aplican las convenciones para escribir y leer un número en el sistema decimal y convertirlo al sistema binario de base dos y viceversa, esto con el propósito de presentar al maestro en formación, otro sistema de numeración posicional distinto al nuestro y que hoy es utilizado por las computadoras. También se opera con ambos sistemas de numeración, además de trabajar con otras bases distintas a dos o diez. Como ejemplo de sistema de numeración no posicional se presenta el sistema de numeración romano.

Diversas investigaciones han sustentado que el concepto de fracción es una de las ideas más complejas que se presenta en la educación primaria, y esto es así, ya que la fracción puede interpretarse de diferentes formas. Cada una de estas interpretaciones ofrece un nivel de dificultad, y presentarlas a los estudiantes sin diferenciarlas puede ser causa del fracaso escolar, razón por la cual el Capítulo III sobre INTERPRETACIÓN Y OPERACIONES CON FRACCIONES, se inicia con un análisis de cada una de las diferentes interpretaciones y de la relación que existen entre ellas para luego, estudiar las operaciones con fracciones. La representación de fracciones, como decimales, es tratada como una extensión del sistema decimal, además se estudia la conversión de un número decimal finito o infinito periódico a fracción ordinaria.

La interpretación de la fracción, como razón, es estudiada en el Capítulo IV que trata el tema de RAZONES Y PROPORCIONES. El concepto de proporcionalidad, tanto la directa como la inversa, es construido a través de actividades de aprendizaje, al igual que la propiedad fundamental de las proporciones. La aplicabilidad de esta propiedad permitirá encontrar la solución a problemas de la regla de tres simple directa e inversa. Otra de las aplicaciones que se estudia en este capítulo, es el Teorema de Tales sobre rectas paralelas cortadas por transversales. Finalmente, en el cálculo del tanto por ciento o porcentaje se hace uso de otra de las aplicaciones más frecuentes de la proporcionalidad.

El Capítulo V es dedicado a la Geometría, específicamente al tema de PERÍMETRO Y ÁREA, EL CONFLICTO ENTRE DOS CONCEPTOS. Se aborda el problema de las escalas con la idea de que el docente se percate de que los dibujos a escala muestran las figuras y permiten comparar las cosas de tamaños diferentes. Visto este tema, se continúa con la presentación de dos conceptos que, a nuestro criterio, tienen repercusiones importantes en el quehacer diario. Sin embargo, son causa de grandes dificultades para la abstracción, estos son los conceptos de perímetro y área. Se presentan actividades diseñadas para mostrar que existen polígonos que se descomponen en rectángulos de igual perímetro y diferentes áreas y polígonos de igual área y diferentes perímetros. Se estudia la propiedad del cuadrado, de ser éste el rectángulo de mayor área para un perímetro fijo. La deducción de la fórmula para encontrar el área de un círculo se hace mediante la sucesión de áreas de polígonos inscritos en una circunferencia.

Se ha querido presentar al maestro, en pocas actividades, un gran número de conceptos matemáticos, que son apenas un ejemplo de la gran variedad de opciones que el maestro puede diseñar para cumplir satisfactoriamente su labor docente.

CAPÍTULO I

LOS NÚMEROS NATURALES Y SUS USOS

RESEÑA HISTÓRICA

Las primeras concepciones de número que tuvo el ser humano datan del Período Paleolítico. Durante ese período, el hoy llamado ser humano vivió en pequeños grupos y bajo condiciones que diferían muy poco de la de los animales. El ser humano progresó en la comprensión de los números cuando se realizó la transición de la etapa de recolección de alimentos, obtenidos de la cacería y la pesca, a la etapa de producción de alimentos a través de la agricultura.

Trabajos recientes han permitido reconstruir la génesis de la escritura de números en Mesopotamia. ¿De qué manera los números han hecho su aparición en los textos escritos? Excavaciones realizadas a mediados del siglo XIX en el actual Irán, revelaron la existencia de bolas y tablillas de arcilla cubiertas de signos. Algunos de estos signos, ya fueron descubiertos en el Cercano Oriente, pero los encontrados en Irán fueron localizados en estratos sucesivos que permiten estudiar la evolución de los signos escritos a partir del IV milenio antes de Cristo. Estos signos son considerados los precursores de la escritura, gracias a estudios conjuntos de arqueólogos, especialistas en Historia de la Ciencia y asiriólogos; la cristalización de esos esfuerzos conjuntos es lo que ha podido proporcionar una tesis convincente de la aparición progresiva de los números en los textos escritos.

El Período Presocrático, primer período de la filosofía griega, comprendida entre los siglos VII al V antes de Cristo, se caracterizó por la explicación racional de la naturaleza física desarrollada por cinco escuelas: la jónica, la pitagórica, la eleática, la atomista y la sofísta. Los pitagóricos se hicieron célebres por haber hecho suya la expresión: "*Todo es número*"; esto nos indica que la secta tenía una concepción humana de la Matemática, es por esa razón que algunos estudiosos de la filosofía y de la ciencia han querido ver en ese hecho el inicio de una visión científica y moderna del mundo.

¿Cómo se puede identificar los números naturales? ¿Por qué se denominan números naturales? ¿Qué propiedades tiene el conjunto de los números naturales? Estas interrogantes invitan al lector a reflexionar sobre el tema. Los números que nos sirven para contar, los números naturales, constituye uno de los inventos más viejos de la humanidad. Bourbaki (1968) y Halmos (1974) señalan que los números naturales son elementos de un conjunto infinito denotado por:

$$\mathbf{N = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, ...\}}$$

El 0 se incluye a veces en la lista de números naturales, pero todo parece indicar que no existe un acuerdo general si se debe incluir o no; Ribenboim (1996), por ejemplo, hace la siguiente afirmación en su artículo "*Sea* P *un conjunto de números naturales; cuando lo consideramos conveniente, asumiremos que* 0 ε P" (p. 532) . Se denota con N_0 al conjunto definido por:

$$\mathbf{N_0 = \{0,1,2,3,4,5,6,7,8,9,...\}}$$

Para efecto de este texto se considera el cero como elemento del conjunto de los números naturales.

Los números naturales constituyen un conjunto cerrado para las operaciones de la adición y la multiplicación, en vista de que al operar con cualesquiera de sus elementos, resulta siempre un elemento de **N**; dicho de otra manera, la suma de dos números naturales siempre es un número natural y, el producto de dos números naturales siempre es un número natural; esto no ocurre con la sustracción y la división. Ellas no son cerradas en el conjunto de los números naturales.

Se ha intentado explicar por qué razón a los elementos de **N** se les denomina naturales. La explicación más aceptada fue dada por Leopold Kronecker, uno de los algebristas y especialistas de la Aritmética de la Alemania del siglo XIX, quien declaró en la conferencia de matemáticos de Berlín de 1886, que los números naturales tienen un origen divino, al afirmar que " *Dios creó los números naturales, el resto es obra de los hombres*." Sin embargo, E.T.Bell (1992) anota que hacia el año 1910, un grupo de matemáticos precavidos y cautelosos se inclinaban a considerar los números naturales como la invención más efectiva realizada por el diablo para enredar al hombre. Un tercer grupo afirma que los números naturales no tienen nada de supernatural, son producto de la intuición humana.

Los números naturales se dividen en números compuestos y números primos. Los números primos se definen como los números que sólo admiten dos divisores, la unidad y el mismo número. Por definición, el número uno no es considerado un número primo. Los números primos constituyen los elementos primarios que permiten reconstruir todo número natural de manera única, mediante la multiplicación. Estos objetos matemáticos han sido la fuente que ha permitido a los matemáticos formular una serie de preguntas que aún no tienen respuestas, tal como: ¿Existe alguna regla que rige su distribución?

Cohen (1995) señala, que una de las propiedades que llama la atención cuando se revisa la lista de números primos es su distribución de manera muy irregular, pues se observa, por ejemplo, que existen veinticinco números primos entre 1 y 100 y que no existe ningún número primo entre 114 y 126; sin embargo, existen cinco números primos entre 97 y 109. Hasta el día de hoy no existe ninguna regla que rija la distribución de los números primos. Para sustentar lo anterior, se dan los siguientes ejemplos: existen 168 números primos entre 1 y 1000; 106 entre 10 000 y 11 000; 81 entre 100 000 y 101 000 y sólo 10 entre 10^{100} y $10^{100} + 1000$. Grupos de matemáticos especializados en Teoría de Números, tratan de hallar una explicación a la distribución y aplicación de los números primos.

En la década del 70 del siglo pasado, surge la utilización de un algoritmo basado en la teoría de los números primos, con el propósito de escribir información secreta a un destinatario, de manera que no sea interpretada por otras personas. De aquí se origina lo que hoy se conoce como la Criptografía, arte de escribir mensajes secretos, asegurándose de que no sean interpretados por los enemigos. En el año de 1978 surge el sistema RSA, llamado así por las iniciales de los apellidos de sus creadores: Rivest, Sahmir y Adelman, cuyo algoritmo consiste en el uso de números primos grandes. Si nos remontamos a la historia nos encontramos con evidencias de los orígenes de la Criptografía cuando Menet Khufu, un escriba en las riberas del Nilo, escribiera en jeroglíficos la vida de su maestro. En la China antigua, se practicaba esa técnica, una especie de estenografía, que le proporcionaba un carácter secreto al mensaje. Otras grandes civilizaciones tales como Mesopotamia y Grecia conservan algunos elementos que son testimonios de un buen nivel de la criptografía. Los especialistas en Teoría del Número se enfrentan hoy a grandes retos, entre los que se encuentra la factorización de los grandes números, que es un desafío de carácter práctico.

ALGUNOS RESULTADOS DE INVESTIGACIONES

Una de la críticas que se hace a la enseñanza de la Matemática, especialmente a la Aritmética, es la de estar basada en una enseñanza de algoritmos, en la que los problemas están desprovistos de contextos. Probablemente, de este tipo de enseñanza se derivan ciertas dificultades en el significado de los números. Es muy frecuente la actitud de los maestros en formación, de resolver problemas con destrezas, en los cuales los resultados son números y no cantidades. Por ejemplo, si calculan la velocidad de un automóvil, indican 30 y no 30 km por hora. Se quiere enfatizar que los números naturales son una abstracción de la cantidad de cosas existentes en un conjunto, pero no de los objetos mismos y que la respuesta a la mayor parte de los cálculos es una cantidad, es decir, un número vinculado con una unidad.

El libro Avances (1998) señala que se han reportado muchas investigaciones sobre los números, las relaciones simbólicas, las formas y la incertidumbre, pero poco se ha investigado sobre el razonamiento. También se menciona en la misma obra que Fuson et al. (1982) y Fuson (1988), sostiene que las ideas de los números hablados que tienen los niños determinan, hasta cierto punto, sus estrategias para sumar y restar y la complejidad de los problemas que pueden resolver. De allí la importancia de desarrollar significados de los números hablados en los niños, desde los primeros años de la escuela. En Avances (1998) aparece que Sowder (1992) señala que alumnos del nivel medio, pueden identificar los valores posicionales de los dígitos en un número, pero no usan con confianza esta idea en contexto, por ejemplo, tienen dificultad para determinar cuántas cajas de 100 caramelos se pueden formar con 48 638 caramelos.

Una de las interrogantes más difíciles de responder es la de: ¿Cómo alcanza el niño el concepto de número natural?

Algunos matemáticos, entre los que se encuentra Poincaré, creen que la idea de la serie de los números naturales resulta evidente a todos; el concepto de número natural es el resultado de una intuición primaria.
Otros en cambio, no están de acuerdo con la idea de que la intuición primaria lleva al niño a alcanzar el concepto de número natural y opinan que el conocimiento de los números naturales está basado en la lógica. Piaget, sugiere que los niños menores de seis años pueden tener una cierta intuición sobre los primeros números hasta el seis, pueden inclusive contar, pero esto no es garantía de que tengan el concepto de número.

En el resumen informativo 5 del Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España, se señala que más de la mitad de los alumnos tienen dificultades para operar con potencias o para hallar el mínimo común múltiplo. En un problema de aplicación del mínimo común múltiplo como es el siguiente: un suceso ocurre cada seis días, otro, cada tres y un tercero cada cuatro; si el día uno de diciembre han ocurrido los tres, ¿cuál será el siguiente día en el que vuelva a suceder lo mismo?, el 43 % responde correctamente al problema .

El maestro de primaria debe ser consciente de que los conceptos matemáticos corresponden a un tipo especial de conceptos, tal como lo afirma Lovell (1986): "*Son generalizaciones sobre relaciones entre ciertas clases de datos*" (p. 33).

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: ORDEN Y COMPARACIÓN DE NÚMEROS NATURALES, REPRESENTACIÓN GRÁFICA

ACTIVIDAD 1-1

El profesor de los maestros en formación plantea a sus estudiantes algunas reflexiones sobre el concepto de número natural.

Inicia comentándoles que los números naturales, tal como se vio en la parte histórica, surgen de la necesidad de contar grupos de objetos. Por ejemplo, el número 5 está asociado con los dedos de una mano, o de un pie, o con las vocales, o con cualquier otro grupo cuyos objetos puedan ponerse en correspondencia uno a uno con uno de los grupos mencionados. Los números naturales se aplican a grupos de objetos discretos y nos dice cuántos objetos hay en el grupo. Aunque la comprensión de los números proviene de experiencias con objetos concretos, éste es un concepto abstracto. El niño no alcanza el concepto de número natural si no llega a existir en su mente, independiente de las cosas, objetos o circunstancias que lo rodean.

Un número natural también puede ser representado geométricamente en términos de puntos sobre una semirrecta. El origen de la semirrecta es el 0 y a una distancia dada se ubica el número natural 1. A esa misma distancia del número natural 1 se determina el número natural 2 y así sucesivamente. De esta manera cada número natural tiene un sucesor. Por ejemplo, el sucesor de 0 es 1 y el sucesor de 1 es 2.

Se observa en la semirrecta que cada número natural es una distancia única desde el 0. El punto correspondiente al número 5, por ejemplo, está una unidad más a la derecha del 0 que el punto correspondiente al número 4. En la semirrecta de números naturales "mayor que" se entiende como "a la derecha de" y "menor que" como "a la izquierda de". Por ejemplo, el número natural 7 es mayor que el número natural 3 y se escribe **7 > 3**, ya que 7 está a la derecha de 3 en la semirrecta de números naturales; **6 < 9**, puesto que 6 está a la izquierda de 9 en la semirrecta de números naturales.

También se observa en la semirrecta que $4 < 7$, $7 < 9$ y que $4 < 9$ lo que corresponde a una propiedad importante del orden de los números naturales llamada transitividad. Es decir, si a, b, c son 3 números naturales tales que $a < b$ y $b < c$ entonces $a < c$.

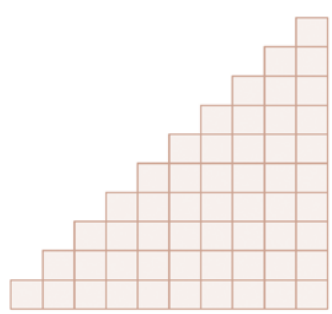
El Profesor, más adelante, pregunta a los maestros si recuerdan el uso ordinal y cardinal que se da a los números. Una maestra explica que cuando el niño trabaja con grupos de 5 lápices, 5 cuadernos, 5 páginas, es decir, con grupos de 5 objetos, y cuenta estos objetos, el número 5 representa el **cardinal** de estos conjuntos y es independiente de las cosas que se cuente. El cardinal indica cuántos objetos tiene el grupo, en cambio cuando se refiere al quinto día de la semana, se piensa que existen cuatro días antes que él. Es decir, no pudo haber quinto día a menos que haya un cuarto, tercero, segundo, o primer día; al decir quinto día se refiere a la posición que ocupa en relación con los otros cuatro que le anteceden. Cuando un número es usado para designar una posición numerada, se refiere al carácter **ordinal** del número.

ACTIVIDAD 1-2

En la primera mitad del siglo XIX, Alemania tuvo como uno de sus ciudadanos al matemático, quizás más grande de todos los tiempos, Carl Friedrich Gauss. La historia nos relata que un día en que asistía a la escuela primaria de su localidad su maestro, deseoso de mantener a los niños ocupados, les propuso que resolvieran el siguiente problema: *Hallar la suma de todos los números naturales desde 1 hasta 100* y, según iban terminando debían colocar sus cuadernos en el pupitre del maestro. Casi de inmediato Gauss entregó su cuaderno con el problema resuelto; cuando todos terminaron, el maestro observó que Gauss fue el único con la respuesta correcta. Antes de ver cómo resolvió el problema el jovencito de diez años, se verá un ingenioso procedimiento geométrico que ideó Al-Hazen para encontrar la suma de los **n** primeros números naturales. Se ejemplifica este procedimiento para encontrar la suma de los números naturales del 1 al 10:

$$\mathbf{1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10}$$

Considérese la siguiente poligonal:

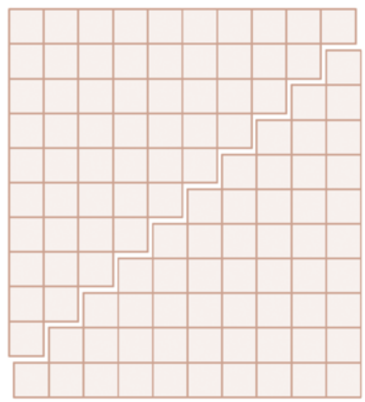


Es importante observar que ella está constituida por diez rectángulos. Cada uno de los rectángulos tiene de base una unidad, mientras que la altura del primer rectángulo (de izquierda a derecha) es de una unidad, el segundo tiene 2 unidades de altura, el tercero tiene tres unidades de altura y así sucesivamente. Por lo que el área de los respectivos rectángulos en unidades cuadradas es:

1 x 1 = 1
1 x 2 = 2
1 x 3 = 3
.. . .
1 x 10 = 10.

La suma de los números naturales del uno al 10 se puede representar geométricamente como la suma de las áreas de cada uno de estos rectángulos.

Si se coloca una poligonal igual a ésta en la parte superior de la primera, de la siguiente manera:



se puede observar que se forma un rectángulo cuya base es de diez unidades y la altura es de (10+1) unidades. El área de un rectángulo es el producto de la base por la altura y como lo que se desea encontrar es el área de la poligonal, ésta es la mitad de la del rectángulo.

$A = \frac{10 \times (10+1)}{2}$ unidades cuadradas = 55 unidades cuadradas.

Luego la suma de: **1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10 = 55.**

Ahora bien: ¿De qué manera Gauss resolvió el problema formulado por su maestro? W.K. Bühler (1987) señala, que muy poco se conoce de la niñez y juventud de Gauss. La principal fuente de información proviene del mismo Gauss, quien de anciano contaba sus historias a sus alumnos y amigos. La literatura indica que Gauss interpretó el problema como la suma de una progresión aritmética. En efecto, si se denota con S la suma de los números naturales del 1 al 100,

S = 1 + 2 + 3 + ... + 98 + 99 + 100.

Escribiendo esta suma en orden inverso se tiene:

S = 100 + 99 + 98 + ... + 3 + 2 + 1.

Al sumar estas dos expresiones, de tal manera que se sumen sus dos primeros términos, los dos segundos términos, los dos terceros términos y así sucesivamente se obtiene:

2S = (1 + 100) + (2 + 99) + (3 + 98) ... + (98 + 3) + (99 + 2) + (100 + 1).

Se observa que se tienen 100 sumandos cuya suma es 101, luego:

2S = 100 x 101 , despejando S se tiene:

$$S = \frac{100 \times 101}{2} = 5050.$$

De esta manera Gauss encontró la respuesta de la tarea asignada por su maestro, de encontrar la suma de los números naturales del 1 al 100.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: NÚMEROS PRIMOS Y COMPUESTOS

ACTIVIDAD 1-3

No se conoce ley que permita formar sucesivamente todos los números primos. Recordemos que un número natural diferente de uno es primo si tiene como únicos divisores la unidad y el mismo número. Hay un método indirecto que se conoce por el nombre de la Criba de Eratóstenes, que consiste en eliminar metódicamente, de la totalidad de números inferiores a uno dado, todos los números que no son primos o sea los números compuestos, que son aquellos que tiene más de dos divisores.

En esta actividad se utiliza la Criba de Eratóstenes para calcular los números primos del 1 al 100.

~~1~~	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

El primer número que se elimina es el numero 1. Como 2 es primo, se eliminan en la tabla todos los números pares, que por ser múltiplos de 2, son compuestos.

El número 3 es primo, se eliminan todos los múltiplos de 3, que a partir del 3 están escritos de tres en tres.

El número 6 ya había sido eliminado como múltiplo de 2, el primer múltiplo de 3 que hay que eliminar es $3 \times 3 = 9$.

El número 5 es primo, se eliminan los números que están escritos de cinco en cinco, pero 10, 15, 20 ya han sido eliminados como múltiplos de 2 o de 3. Así, que el primer múltiplo de 5 que se elimina es $5 \times 5 = 25$.
De la misma forma se procede con el número primo 7 y el primer múltiplo que se elimina es el $7 \times 7 = 49$.

Con el número 11, el primer número múltiplo que se eliminaría es $11 \times 11 = 121$ y como es superior a 100 se ha terminado el cálculo.

Si se observa la tabla, después de haber eliminado los números compuestos, quedan los números primos inferiores a 100, que son 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97.

ACTIVIDAD 1- 4

La profesora de Matemática plantea a sus alumnos una actividad que consiste en hacer una ordenación distinta de la Criba de Eratóstenes y solicitarles que enuncien una conjetura sobre una posible expresión que produzca números primos.

Como motivación, les informa que los matemáticos han encontrado expresiones para producir números primos, pero no han podido hallar una que sólo produzca números primos al sustituir los valores 1, 2, 3, ... en la expresión.

Una de estas expresiones es $f(n) = n^2 – n + 41$, para $n = 1, 2, 3, ...,40$, pero para $n = 41$ falla, ya que se tiene que $f(41) = 41^2 – 41 + 41 = 41^2$, que evidentemente no es un número primo.

Otra de las expresiones con la que se obtienen números primos es:
$f(n) = n^2 – 79n + 1601$, la cual es cierta para n menor que 80, pero falla para $n = 80$;

$$
\begin{aligned}
f(80) &= 80^2 – 79 \times 80 + 1601 \\
&= 80(80 – 79) + 1601 \\
&= 80 + 1601 \\
&= 1681 = 41^2, \text{ que no es un número primo.}
\end{aligned}
$$

Luego les presenta dos expresiones más y les pide que encuentren cuál es el primer valor de n en cada caso para el cual no se obtiene número primo.

a) $f(n) = n^2 + n + 5$
b) $f(n) = n^2 + n + 11$.

Continúa la profesora motivando al grupo de alumnos con la presentación del aporte del matemático Fermat (1601 – 1665), quien enunció la famosa conjetura de que todos los números de la forma:

$f(n) = 2^{2^n} + 1$, son números primos.

Pero, al igual que en los casos anteriores, esta conjetura falla. En 1732 Euler (1707 – 1783), otro famoso matemático, encontró que f(5) = 4294967297 no es primo, ya que puede ser descompuesto en 641 x 6700417. La profesora invita a sus alumnos a que comprueben el resultado anterior, utilizando una calculadora.

Para realizar la actividad propuesta de encontrar una expresión que produzca números primos, les recuerda cómo encontrar los números primos entre 1 y 100 mediante la Criba de Eratóstenes, método estudiado en la ACTIVIDAD 1-3. La profesora les propone una distribución diferente, les solicita que hagan una tabla de 6 columnas del 2 al 100 tal como se muestra, y les pide que encierren en un círculo los números primos.

2	3	4	5	6	7
8	9	10	11	12	13
14	15	16	17	18	19
20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31
32	33	34	35	36	37
38	39	40	41	42	43
44	45	46	47	48	49
50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61
62	63	64	65	66	67
68	69	70	71	72	73
74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85
86	87	88	89	90	91
92	93	94	95	96	97
98	99	100			

En la primera, tercera y quinta columna los alumnos y alumnas, deben haber encerrado en un círculo sólo el número 2 que es primo, ya que los demás son múltiplos de 2. En la segunda columna sólo el 3 que es primo se debe haber encerrado en un círculo, ya que los demás son múltiplos de 3.

¿Qué observan Uds.? pregunta la profesora a su grupo de alumnos. ¿Qué podrían decir de los números que forman la quinta o penúltima columna? ¿Dónde están situados los números primos a excepción del 2 y del 3?

Luego de escuchar individualmente a algunos alumnos y alumnas invita a una alumna a expresar sus observaciones: "*La quinta columna está formada por los números múltiplos de 6, por lo que puedo expresarlos como 6n y los números primos a excepción del 2 y del 3 están en la columna anterior a ésta y posterior a ella*". ¿Cómo, pregunta la profesora, se expresarían los números que están en estas dos columnas?, "*Los que están en la columna anterior a la de los múltiplos de 6 estarían dados por la expresión* 6n – 1*; y los que están en la siguiente columna a los múltiplos de 6 se representarían como* 6n + 1". ¿Bueno, cuál es su conjetura?, pregunta la profesora. Un alumno se levanta y dice "*Los números primos difieren en una unidad de los múltiplos de 6, es decir, si tengo un número primo mayor que 3 éste puede expresarse como* $f(n) = 6n - 1$ *ó* $f(n) = 6n + 1$".

La profesora, tratando de obtener mayor información de la tabla, pregunta: ¿Cómo se representarían los números que están en la primera columna? ¿Y los que están en las dos siguientes?

Luego propone continuar con la tabla hasta el 200, ¿Será posible que todos los demás números primos también se encuentren en la cuarta o sexta columna?

La profesora, para finalizar la actividad, les pide que den un valor a **n** para el cual falle la conjetura: $f(n) = 6n + 1$ ó $f(n) = 6n - 1$.

ACTIVIDAD 1- 5

En un aula de clases una maestra enseña a sus alumnos la importancia de conocer la descomposición única de un número compuesto en el producto de sus factores primos y le pide a los alumnos que observen que 180 no es un número primo y que por lo tanto admite un número primo como divisor, de donde:

$180 = 2 \times 90$.

Como 2 es primo y 90 no lo es, él admite un divisor primo (que puede ser igual a 2), así que:
$90 = 2 \times 45$.

Como 2 es primo y 45 no lo es, él admite un divisor primo, así que:
$45 = 3 \times 15$.

Como 3 es primo y 15 no lo es, él admite un divisor primo, así que:
$15 = 3 \times 5$.

Como 3 y 5 son primos, se puede escribir el número 180 como el producto de los factores primos: 2, 2, 3, 3, 5. Por lo tanto $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

La maestra invita a los alumnos a encontrar una manera rápida para descomponer un número compuesto en el producto de sus factores primos.

Una manera rápida de encontrar los factores primos de un número compuesto es colocar, en columna, a la derecha, los divisores primos del número, como se muestra en el cuadro siguiente, que ilustra el caso de los factores de 180:

180	2
90	2
45	3
15	3
5	5
1	

Así, $180 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 5 = 2^2 \times 3^2 \times 5$.

ACTIVIDAD 1-6

En una escuela de formación de maestros, se inaugura un seminario para los maestros sobre teoría de números, y una de las actividades que desarrollan tiene como título: ¿Cómo reconocer si un número es primo o no?

La actividad consiste en analizar la relación entre los divisores primos de un número compuesto dado y el cuadrado de esos divisores primos. Se invita a los participantes a dividir los números 25, 114 y 300 por sus divisores primos. Los maestros escriben:

$25 = 5 \times 5$.
Observan que $5^2 = 25$

$114 = 2 \times 57$
$114 = 3 \times 38$
$114 = 19 \times 6$.

Luego de haber elevado al cuadrado cada uno de los divisores primos observan que $2^2 < 114$, $3^2 < 114$ y que $19^2 > 114$.

Por otra parte:
$300 = 2 \times 150$
$300 = 3 \times 100$
$300 = 5 \times 60$.

Observan que $2^2 < 300$, $3^2 < 300$, $5^2 < 300$.

El expositor pregunta a los maestros qué relación han encontrado entre los números y el cuadrado de los divisores primos, a lo que responden que: "***Los números estudiados admiten un divisor primo cuyo cuadrado es menor o igual al número***".

Cuando los maestros han descubierto la relación, el expositor les explica que se trata de un resultado muy importante que dice: "***Todo número compuesto admite al menos un divisor primo cuyo cuadrado es menor o igual al número***". Además, les dice que en sus clases de Matemática estudiarán, más adelante, la demostración formal de este enunciado.

ACTIVIDAD 1-7

En una clase de Matemática, un alumno le preguntó a su maestra cómo se puede reconocer si un número es primo. La maestra le prometió realizar una actividad en grupo para que aprendieran a reconocer los números primos. Los dispuso en mesas de cinco alumnos por mesa y les dijo que investigaran si el número 31 es primo. Después de escuchar las opiniones de los alumnos, la maestra los orienta a que comiencen dividiendo 31 por el menor número primo que conocían, es decir, el número 2, así observaron que la división de 31 por 2 no es exacta. Les señaló que el cuadrado de 2 es 4 el cual es menor que 31. Les solicita que repitieran el procedimiento con los números primos 3, 5 y 7. Los alumnos realizan el procedimiento dividiendo 31 por el número 3 y encuentran que dicha división no es exacta, además observan que el cuadrado de 3 es 9 que es menor que 31. Después dividen 31 por el número primo que sigue, es decir, el 5, resultando que la división no es exacta y observan que el cuadrado de 5 es menor que 31. Al dividir el número 31 por el número primo 7, observan que la división no es exacta y el cuadrado de 7 es 49 que es mayor que 31.

En este momento, la maestra asegura a los alumnos que el número 31 es primo. Un alumno del grupo se levanta y le dice a la maestra ¿Maestra, podría explicar esa historia del cuadrado del número primo que debe ser menor que 31?

La maestra los invita a leer de nuevo la ACTIVIDAD 1-6 y deducir la respuesta. Después de un tiempo, una alumna se levanta y dice: "*31 es primo porque al dividir hasta el número primo 5 la división no es exacta, al dividir por 7 no es exacta y el cuadrado de 7 es 49 que es mayor que 31, y si fuera compuesto hubiese admitido un divisor primo cuyo cuadrado sea inferior o igual a 31 tal como se presentó en la ACTIVIDAD 1-6*".

La maestra la felicita por su razonamiento y confirma que para reconocer si un número es primo es suficiente dividir el número por todos los números primos 2,3,5,7,... cuyo cuadrado sea inferior al número, y si ninguna de estas divisiones es exacta, el número es primo. Los invita a utilizar el procedimiento para verificar si el número 113 es primo o no.

Los alumnos realizan las divisiones sucesivas de 113 por los números primos 2, 3, 5, 7,... y encuentran que, $\frac{113}{2}, \frac{113}{3}, \frac{113}{5}, \frac{113}{7}$ no son divisiones exactas y además, $2^2 < 113$; $3^2 < 113$; $5^2 < 113$ y $7^2 < 113$. Al dividir $\frac{113}{11}$ no es una división exacta, pero $11^2 > 113$, por lo que concluyen que 113 es un número primo.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: MÚLTIPLOS Y DIVISORES DE UN NÚMERO.

ACTIVIDAD 1- 8

La guardería de una comunidad atiende niños de 2 a 4 años y como recreación los llevan de excursión. Los niños de 2 años van de excursión cada 15 días, los de 3 años van cada 10 días y los de 4 años van cada 5 días. La niñera y la secretaria de la guardería quieren saber: ¿Cuántos días transcurrirán para que vuelvan a coincidir los tres grupos en excursión, si se inicia esta cuenta el primer día en que asisten a la guardería y los tres grupos salen de excursión ese día?. ¿Cuántas veces más vuelven a coincidir en ir de excursión los tres grupos de niños en los 240 días que asisten a la guardería?

Para responder a las preguntas, la niñera analiza la situación de la siguiente manera:

Los niños de 2 años van de excursión cada 15 días, esto quiere decir que vuelven a ir después de transcurridos: 15, 30, 45, 60, 75, 90, 105, 120, 135, 150, 165, 180, 195, 210, 225, 240 días.

Los niños de 3 años irán transcurridos: 10, 20, 30, 40, 50, 60, 70, 80, 90, 100, 110, 120, 130, 140, 150, 160, 170, 180, 190, 200, 210, 220, 230, 240 días.

Y los niños de 4 años irán luego de transcurrir: 5, 10, 15, 20, 25, 30, 35, 40, 45, 50, 55, 60, 65, 70, 75, 80, 85, 90, 95, 100, 105, 110, 115, 120, 125, 130, 135, 140, 145, 150, 155, 160, 165, 170, 175, 180, 185, 190, 195, 200, 205, 210, 215, 220, 225, 230, 235, 240 días.

Lo anterior permite a la niñera observar que los tres grupos coinciden en ir de excursión luego de transcurrir 30, 60, 90, 120, 150, 180, 210, 240 días. Por esta razón deberán transcurrir 30 días para que vuelvan a coincidir. Es decir, que cada 30 días irán de excursión los tres grupos de niños. Para responder a la segunda pregunta, sobre cuántas veces coinciden en ir de excursión los tres grupos de niños durante los 240 días que asisten a la guardería, divide el total de días entre los 30 días que transcurren entre una excursión y otra, en la que se encuentran los tres grupos, esto es $\frac{240}{30} = 8$. La niñera concluye que los tres grupos de niños se encuentran 8 veces durante los 240 días.

La secretaria analiza la situación de la siguiente manera:

Si los niños van de excursión cada 5, 10 y 15 días, quiere decir que se debe encontrar el mínimo común múltiplo, (se denota el mínimo común múltiplo de dos números **a** y **b** por M.C.M.(**a**, **b**)), por lo que procede a encontrarlo mediante el procedimiento que le enseñaron en la escuela primaria y que consiste en buscar los factores primos de estos números; lo cual hace con el siguiente algoritmo:

$$\begin{array}{rrr|l} 5\ - & 10\ - & 15 & 2 \\ 5\ - & 5\ - & 15 & 3 \\ 5\ - & 5\ - & 5 & 5 \\ 1\ - & 1\ - & 1 & \end{array}$$

Luego el M.C.M.(5, 10,15) = 2 x 3 x 5 = 30.

Al igual que la niñera, la secretaria encuentra el número de veces que coinciden los tres grupos de excursión, mediante la operación: $\frac{240}{30} = 8$.

La directora de la guardería estaba presente mientras la niñera y la secretaria hacían sus análisis, de manera que le preguntaron: ¿Cuál de las dos ha utilizado un procedimiento correcto?

La directora responde que la niñera utilizó la definición: **el mínimo común múltiplo de dos o más números naturales es el menor de los múltiplos comunes de dichos números**, por lo tanto encontró primero los múltiplos de cada número, luego determinó la intersección de estos múltiplos, que no es más que los múltiplos comunes, y finalmente, de estos múltiplos comunes escogió el menor. La secretaria utilizó el algoritmo para encontrar el M.C.M.(5, 10, 15), por lo cual el procedimiento utilizado por ambas es correcto.

ACTIVIDAD 1- 9

Ana, alumna del grupo de formación docente, tiene que realizar una investigación sobre cómo determinar el máximo común divisor de dos o más números naturales.

Al investigar encuentra la definición: **El máximo común divisor de dos o más números naturales es el mayor de los divisores comunes. Se denota el máximo común divisor de los números a y b por M.C.D.(a, b)**. Ana utilizó esta definición para calcular el M.C.D.(60, 24), y procede a determinar los divisores de cada uno de estos dos números:

Divisores de 60 = {1, 2, 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15, 20, 30, 60}.
Divisores de 24 = {1, 2, 3, 4, 6. 8. 12, 24}.

Luego determina los divisores comunes, de 24 y 60: {1, 2, 3, 4, 6, 12} y finalmente selecciona el mayor de estos divisores comunes, encontrando que el M.C.D.(24, 60) es 12.

Ana encuentra que se puede hallar el máximo común divisor de dos o más números naturales, mediante la factorización o descomposición en factores primos de cada uno de los números naturales dados, por lo que procede:

$$
\begin{array}{r|l}
60 & 2 \\
30 & 2 \\
15 & 3 \\
5 & 5 \\
1 &
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{r|l}
24 & 2 \\
12 & 2 \\
6 & 2 \\
3 & 3 \\
 & \;\; 1
\end{array}
$$

60 = 2 x 2 x 3 x 5 24 = 2 x 2 x 2 x 3
60 = 2^2 x 3 x 5 24 = 2^3 x 3.

Observa que el mayor de los divisores comunes de 60 y 24 es:
M.C.D.(60, 24) = 2 x 2 x 3 =2^2 x 3 = 12. Además deduce que **el máximo común divisor de dos números naturales, es el producto de los factores primos comunes con su menor exponente**.

El profesor de Ana al evaluar la investigación, le hace saber que existe otra forma de encontrar el máximo común divisor de dos números naturales, pero que antes de dársela a conocer es necesario que realice las dos próximas actividades, para estudiar algunos resultados sobre los criterios de divisibilidad de números naturales.

ACTIVIDAD 1- 10

El profesor de Matemática le deja una tarea a sus estudiantes donde les solicita que comprueben que:

a) Si 117 y 65 son divisibles por 13 también lo es el resto de su división.
b) Si 217 y 105 son divisibles por 7 también lo es el resto de su división.

Los estudiantes resuelven la tarea y encuentran que:

a) $\frac{117}{13} = 9$ $\frac{65}{13} = 5$ Por lo tanto 117 y 65 son divisibles por 13.

Además:

$$\begin{array}{r|l} 117 & 65 = 1, \\ -\underline{65} & \\ 52 & \end{array}$$

y el resto 52 es divisible también por 13, ya que: $\frac{52}{13} = 4$.

b) $\frac{217}{7} = 31$, $\frac{105}{7} = 15$. Luego 217 y 105 son divisibles por 7.

Además:

$$\begin{array}{r|l} 217 & 105 = 2, \\ -\underline{210} & \\ 7 & \end{array}$$

y el resto 7 es divisible por 7.

Un estudiante pregunta al profesor: ¿Siempre que un número divida al dividendo y al divisor también dividirá al resto de la división?

El profesor lo invita y guía en la prueba de la conjetura que acaba de hacer, y para esto se basa en la definición de la división de dos números naturales:

Sea **a** el dividendo, **b** $\neq$ **0** el divisor, **q** el cociente y **r** el resto, se tiene que:
a = bq + r; **0 ≤ r < b.**

Despeja **r** y obtiene: **a – bq = r.**

Si un número **m** divide a **b**, divide a **bq**, y si divide a **a**, dividirá a la diferencia de ambos, por lo tanto, **m** divide a **r**.

Y recíprocamente, si un número **m** divide al resto y al divisor también divide al dividendo.

El profesor enuncia la proposición que acaba de demostrar y que previamente había sido conjeturada por un estudiante. "**Si en una división, un número divide al dividendo y al divisor, también divide al resto**".

ACTIVIDAD 1- 11

Como actividad complementaria a los criterios de divisibilidad, el profesor de Matemática pide a sus estudiantes que encuentren:

a) El máximo común divisor de 54 y 36, y el máximo común divisor de 36 y el resto de la división de 54 por 36.

b) El máximo común divisor de 10 y 6 y el máximo común divisor de 6 y el resto de la división de 10 por 6.

En una de las tareas, ya corregida y evaluada como buena, se realizaron los siguientes cálculos:

a) El máximo común divisor de 54 y 36:

$$\begin{array}{r|l} 54 & 2 \\ 27 & 3 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 36 & 2 \\ 18 & 2 \\ 9 & 3 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$54 = 2 \times 3^3$ $\quad 36 = 2^2 \times 3^2$ $\quad$ El M.C.D.(54, 36) $= 2 \times 3^2 = 18$.

Por otro lado, se tiene que la división de 54 por 36:

$$\begin{array}{r} 54 \,\rceil\, 36 = 1 \\ -\underline{36} \\ 18 \end{array}$$

tiene como resto 18, de manera que procede a encontrar el M.C.D.(36, 18) y encuentra que es 18.

b) El máximo común divisor de 10 y 6:

$$\begin{array}{r|l} 10 & 2 \\ 5 & 5 \\ 1 & \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{r|l} 6 & 2 \\ 3 & 3 \\ 1 & \end{array}$$

$10 = 2 \times 5$ $\quad 6 = 2 \times 3$ $\quad$ El M.C.D.(10, 6) = 2.

La división de 10 por 6:

$$\begin{array}{r} 10 \,\rceil\, 6 = 1 \\ -\underline{6} \\ 4 \end{array}$$

tiene como resto 4 y el M.C.D.(6,4) = 2.

¿Será que el máximo común divisor de dos números **a** y **b** es igual al M.C.D. de **b** y el resto **r** de la división de **a** por **b**? se pregunta un estudiante. Y el profesor procede a responder al estudiante con la siguiente demostración:

Sea **a = bq + r**.

Todo divisor de **a** y **b** es divisor de **r**, demostrado en la ACTIVIDAD 1-10, y recíprocamente todo divisor de **b** y **r** es también divisor de **a**, luego la pareja de números **a** y **b** y la pareja de números **b** y **r** tienen los mismos divisores y, por consiguiente el mismo máximo común divisor.

Si r es el resto de la división de a por b, el M.C.D.(a, b) = M.C.D.(b, r).

ACTIVIDAD 1-12

En la ACTIVIDAD 1-9 el profesor le prometió a Ana, alumna del grupo de formación docente, que le iba a dar a conocer otra forma de encontrar el máximo común divisor de dos números naturales, siempre y cuando realizara las dos actividades inmediatamente anteriores a ésta.

El otro procedimiento al que se refería el profesor, para encontrar el M.C.D. de dos números naturales es el **Algoritmo de Euclides**, el cual está basado en la definición de división de dos números naturales que fue enunciada en la ACTIVIDAD 1-10.

Si **a** y **b** son dos números con $\mathbf{b} \neq 0$ se tiene que:

$\mathbf{a = bq_1 + r_1;}$ $\mathbf{0 \leq r_1 < b}$; donde $\mathbf{q_1}$ es el cociente y $\mathbf{r_1}$ el resto de la división de **a** por **b**. Además se demostró en la ACTIVIDAD 1-11 que si $\mathbf{r_1}$ es el resto de la división de **a** por **b**, el **M.C.D.(a, b)** es igual al **M.C.D.(b, $\mathbf{r_1}$)**. Mediante una sucesión de estas operaciones indicadas a continuación tenemos:

Si $\mathbf{r_2}$ es el resto de la división de **b** por $\mathbf{r_1}$, se tiene que:

$\mathbf{b = r_1q_2 + r_2;}$ $\mathbf{0 \leq r_2 < r_1}$, **y el M.C.D. (b, $\mathbf{r_1}$) = M.C.D. ($\mathbf{r_1, r_2}$).**

Si $\mathbf{r_3}$ es el resto de la división de $\mathbf{r_1}$ por $\mathbf{r_2}$ se tiene que:

$\mathbf{r_1 = r_2q_2 + r_3;}$ $\mathbf{0 \leq r_3 < r_2}$, **y el M.C.D. ($\mathbf{r_1, r_2}$) = M.C.D. ($\mathbf{r_2, r_3}$).**

Si $\mathbf{r_4}$ es el resto de la división de $\mathbf{r_2}$ por $\mathbf{r_3}$ se tiene que:

$\mathbf{r_2 = r_3q_3 + r_4;}$ $\mathbf{0 \leq r_4 < r_3}$ **y el M.C.D. ($\mathbf{r_2, r_3}$) = M.C.D.($\mathbf{r_3, r_4}$).**

. . .   .

Se observa que:

$\mathbf{b > r_1 > r_2 > r_3 > r_4 > \ldots \geq 0}$

y después de un cierto número de divisiones se llega a un resto nulo, por lo que:

$\mathbf{r_{n-1} = r_nq_n}$ **y el M C D. ($\mathbf{r_{n-1}, r_n}$) = $\mathbf{r_n}$.**

De esta sucesión de divisiones sucesivas conocida como el **Algoritmo de Euclides** se tiene que:

M.C.D. (a, b) = M.C.D. (b, $\mathbf{r_1}$) = M.C.D. ($\mathbf{r_1, r_2}$) = M.C.D. ($\mathbf{r_2, r_3}$) = M.C.D. ($\mathbf{r_3, r_4}$) = ...
= M. C. D. ($\mathbf{r_{n-1}, r_n}$) = $\mathbf{r_n}$.

El máximo común divisor de dos números naturales, mediante el Algoritmo de Euclides, es el último resto no nulo de las divisiones sucesivas.

Si se aplica este algoritmo al cálculo del M.C.D.(24,60) se tiene que:

60 = 24 x 2 + 12
24 = 12 x 2 + 0
de donde el M.C.D.(24,60) es 12.

Ana, que sólo conocía el procedimiento de descomposición en factores primos para encontrar el máximo común divisor, aprecia la ventaja de conocer el Algoritmo de Euclides, ya que éste le permite ahorrar tiempo en los cálculos, en casos de que se trate de números grandes. De modo que, al solicitarle encontrar el M.C.D.(2618, 539) utiliza este algoritmo y procede así:

2618 = 539 x 4 + 462
539 = 462 x 1 + 77
462 = 77 x 6 + 0
Luego el M.C.D.(2618, 539) = 77, el cual ha sido encontrado en sólo tres pasos.

El profesor le pide ahora encontrar el M.C.D.(8, 35) y Ana utiliza el Algoritmo de Euclides:

35 = 8 x 4 + 3
8 = 3 x 2 + 2
3 = 2 x 1 + 1
2 = 2 x 1 + 0
y observa que el último resto no nulo de las divisiones sucesivas es 1, entonces el M.C.D.(35, 8) = 1.

El profesor le dice que si **el M.C.D.(a, b) = 1, los números a y b se denominan primos entre sí o primos relativos**.

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

I. Distinga el uso cardinal y ordinal de los números naturales citados en los siguientes enunciados:

1. Juan está leyendo un libro y va por la página 43.
2. Al llegar al centro de salud, se nos entrega una ficha con el número 12.
3. Se necesitan 32 dulces para la fiesta.
4. Se consiguieron 10 bolas para jugar en el parque.
5. A la excursión van 35 niños.
6. Al llegar a clases la maestra me informa que ya llegaron 8 estudiantes.
7. Los esposos González celebran sus 25 años de casados.
8. Rogelio compró un saco con 50 naranjas.
9. Rosa María necesita 5 cuadernos.
10. Los 4 primeros niños de la fila, irán al recreo.

II. Resuelva los siguientes problemas:

1. En la ACTIVIDAD 1-2 se estudió, de manera geométrica, cómo se puede determinar la suma de los diez primeros números naturales desde el 1 hasta el 10; en la misma actividad se mostró de qué manera Gauss determinó la suma de los cien primeros números naturales desde el 1 hasta el 100. ¿Podría Ud. determinar la suma de los números naturales desde 1 hasta n?

2. Complete la siguiente tabla con los números naturales menores que 26, que cumplan con la condición de tener el número de divisores que se indica en la primera columna.

Número de divisores	Números Naturales
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	
8	

3. La imprenta de una población cuenta con 2 empleados para cumplir con las tareas de la misma en la localidad. El propietario desea pagarles con bonos iguales del mayor valor posible, de manera que el salario de los empleados sea cubierto con dichos bonos. Si los empleados ganan B/280.00 y B/160.00 mensualmente, ¿De cuánto deben ser los bonos que gire el propietario?

4. En las cercanías del Canal de Panamá, instalan tres faros. El primero ilumina el mar cada 2 horas, el segundo cada 2 horas y media y el tercero cada 3 horas. ¿Cada cuánto tiempo los tres faros iluminan el mar?

5. Un campesino desea cercar con alambre 3 parcelas de perímetro 60m, 150m y 200m. En el pueblo venden el alambre por tramos de 5m, 10m, 15m y 20m. ¿Cuál es la mayor longitud de los tramos con los que puede cercar exactamente las parcelas y cuántos tramos necesita?

6. En una escuela primaria hay una disposición de que los grupos que salgan de excursión no deben ser de más de 65 niños. Un maestro organiza una excursión y para su mejor organización conforma pequeños grupos. Él sabe que si forma grupos de dos le sobra un niño. Si forma grupos de tres le

sobra un niño. Si los forma en grupos de cuatro le sobra uno, y si forma grupos de seis le sobra uno; pero si los forma de siete niños no le sobra ninguno ¿Cuántos niños fueron a la excursión?

7. Los docentes de una escuela de formación de maestros realizan una feria y les han donado confites de tres sabores diferentes: piña, fresa y limón. Deciden hacer 3 tipos de bolsas a saber A, B y C, en las que colocarán un número diferente de confites en cada una, tal como se muestra en el siguiente cuadro:

Tipo de bolsa	Número de confites de piña	Número de confites de fresa	Número de confites de limón
A	3	4	l
B	p	9	2
C	6	f	6

Los maestros se divierten tratando de encontrar: ¿Cuántos confites de limón (l) deben colocar en la bolsa A, cuántos de piña (p) en la bolsa B y cuántos de fresa(f) en la bolsa C, para que el producto del número de confites en cada una de las bolsas y el producto del número de confites de cada sabor sean iguales y que a la vez los números de confites encontrados sean primos entre sí?

8. Calcular el máximo común divisor de los números 1224 y 126 utilizando el Algoritmo de Euclides y mediante la descomposición en factores primos.

SUGERENCIAS DE SOLUCIÓN

I. El uso de los números naturales citados en los enunciados es el siguiente:

1. Juan lee el libro ordenadamente, por lo que al decir que va por la página 43 implica que ha leido primero la página 1, luego la 2, y así sucesivamente por lo que el uso dado al 43 es el de ordinal.
2. Al tomar la ficha con el número 12 es necesario esperar que los 11 pacientes anteriores hayan sido atendidos, por lo que el uso del 12 en el enunciado es el de ordinal.
3. Si se necesitan 32 dulces para la fiesta el orden en que se cuenten no es importante, por lo que el número 32 tiene un uso cardinal en el enunciado.
4. Al contar el número de bolas para jugar en el parque el orden no es importante, por lo que el uso del número 10 en este enunciado es el de cardinal.
5. Van 35 niños a la excursión, éstos se pueden contar independiente del orden, por lo que el uso de 35 en este enunciado es el de cardinal.
6. Si ya llegaron 8 estudiantes a clases, quiere decir que yo fui el noveno en llegar, luego el uso del 8 en este enunciado es el de ordinal.

7. Celebrar 25 años de casados implica que pasaron 24 aniversarios antes de llegar al vigésimo quinto aniversario, por lo que el 25 tiene un uso ordinal en este enunciado.
8. El número de naranjas en la bolsa es de 50, no importa el orden en que se cuenten, por lo que el número 50 en este enunciado es el de cardinal.
9. El número de cuadernos que necesita Rosa María es independiente del orden, luego el uso del 5 en este enunciado es el de cardinal.
10. Los niños que van al recreo, dependen del orden en que están en la fila, por lo que al 4 se le da en este enunciado un uso ordinal.

II. Sugerencias para la solución de los problemas

1. Sea S_n la suma de los n primeros números naturales desde 1 hasta n.
$S_n = 1 + 2 + 3 + \ldots + (n-2) + (n-1) + n$. En orden inverso se tiene:
$S_n = n + (n-1) + (n-2) + \ldots + 3 + 2 + 1$
Sumando estas dos expresiones se obtiene que $2S_n$ es igual a n sumandos iguales a (n + 1):
$2S_n = n(n + 1)$; luego al dividir ambos miembros por 2 se obtiene la solución:

$$S_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

2. La tabla que a continuación se presenta, muestra los números naturales menores que 26, que cumplen con la condición de tener el número de divisores que se indica en la primera columna.

Número de divisores	Números Naturales
1	1
2	2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23
3	4, 9, 25
4	6, 8, 10, 14, 15, 21, 22
5	16
6	12, 18, 20
7	-----
8	24

3. Si un empleado gana B/280.00 y el otro empleado gana B/160.00, se necesita calcular el M.C.D.(280, 160). Utilizando el algoritmo de Euclides se tiene:

280 = 160 x 1 + 120
160 = 120 x 1 + 40
120 = 40 x 3 + 0
De donde el M.C.D.(280, 160) = 40.

Por lo tanto, el propietario puede hacer bonos de B/40.00 y pagarle a los empleados por semana, de manera que para el empleado que gana B/280.00 necesita 7 bonos y para el empleado que gana B/160.00 necesita 4 bonos.

4. El primer faro ilumina cada 120 minutos, el segundo cada 150 minutos y el tercero cada 180 minutos. Para calcular cada cuánto tiempo iluminan los tres faros el mar, se necesita conocer el mínimo común múltiplo de esos tres números.

Para ello se utiliza el algoritmo estudiado en las actividades, de donde:

180	120	150	2
90	60	75	2
45	30	75	2
45	15	75	3
15	5	25	3
5	5	25	5
1	1	5	5
1	1	1	

Se obtiene que el M.C.M.(180,120,150) = 2^3 x 3^2 x5^2 = 1800.
De donde los tres faros iluminan el mar cada 1800 minutos, es decir cada 30 horas.

5. Como se vio en la ACTIVIDAD 1-9, el máximo común divisor de dos números es el mayor de los divisores comunes de dichos números, así que si se trata de tres números, el máximo común divisor de ellos se encuentra calculando el M.C.D. de dos de los números y luego el M.C.D. de éste y el tercer número.

Para las parcelas de 60 m y 150 m se calcula el M.C.D.(60, 150). Utilizando el algoritmo de Euclides, se tiene que:
150 = 60 x 2 + 30
60 = 30 x 2 + 0.
De donde el M.C.D.(60,150) = 30.
Como ya se conoce el máximo común divisor de 150 y 60 basta ahora conocer el M.C.D.(30, 200), de donde:
200 = 30 x 6 + 20
30 = 20 x 1 + 10
20 = 10 x 2 + 0
Luego el M.C.D.(30,200) = 10.
El campesino debe pedir tramos de alambre de 10 m. Como necesita un total de 60 m + 150 m + 200 m = 410 m, debe comprar 41 tramos de10 m de alambre cada uno.

6. Se sabe que si el maestro forma grupos de siete niños no sobra ninguno, esto quiere decir que va un número de niños que es múltiplo de 7 menor o igual que 65.

Esto es: $7n \leq 65$.
De donde n puede ser {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}.
Pero n no puede ser 1 porque serían 7 niños y al repartirlos en grupos de cuatro sobrarían 3 niños. Además n no puede ser 2, 4, 6, u 8, porque sería un número múltiplo de 2 y no sobraría ningún niño. Tampoco n puede ser 3 ó 9 porque serían números múltiplos de 3 y no sobraría ningún niño. Tampoco n puede ser 5 porque serían 35 niños y sobrarían 2 al formar grupos de 3 niños. Por lo que n debe ser 7, es decir, deben ir 49 niños, ya que si se divide esta cantidad en grupos de 2, 3, 4 y 6 sobraría 1 niño. Luego en la excursión van 49 niños.

7. Como se quiere que el producto del número de confites en la bolsa A ($3 \times 4 \times l$) sea igual al producto del número de confites en la bolsa B ($p \times 9 \times 2$) y también sea igual al producto del número de confites en la bolsa C ($6 \times f \times 6$), se tiene que:
$3 \times 4 \times l = p \times 9 \times 2 = 6 \times f \times 6$
$12l = 18p = 36f$
Se observa que si el producto de estos números es n, entonces n es múltiplo de 12, de 18 y de 36.
El mínimo común múltiplo de 12, 18 y 36 es 36, así que:
$36 = 12l$, por lo que $l = 3$
$36 = 18p$, por lo que $p = 2$
$36 = 36f$, por lo que $f = 1$

El cuadro con el número de confites en cada bolsa queda así:

Tipo de bolsa	Número de confites de piña	Número de confites de fresa	Número de confites de limón
A	3	4	**3**
B	**2**	9	2
C	6	**1**	6

Observa que 3, 2 y 1 son primos entre sí, además los productos del número de confites de cada sabor son iguales. Si se considera otro múltiplo común de 12, 18 y 36 éste será un múltiplo de 36, es decir, de la forma 36 m y resultaría que $l = 3m$, $p = 2m$ y $f = m$, pero l, p y f no son primos entre sí. Por lo que la solución es $l = 3$, $p = 2$ y $f = 1$.

8. Utilizando el Algoritmo de Euclides, se divide el número 1224 por el número 126 y se encuentra que $1224 = 126 \times 9 + 90$.

Luego se divide 126 por el resto 90 como se ilustra en la ACTIVIDAD 1-12 y se encuentra que:
126 = 90 x 1 + 36.

Se continua dividiendo, de manera similar, hasta encontrar el último resto no nulo. De allí que:
90 = 36 x 2 + 18
36 = 18 x 2 + 0.

De donde el M.C.D. (1124, 1226) = 18.

Mediante la descomposición en factores primos se tiene que:

1224	2
612	2
306	2
153	3
51	3
17	17
1	

126	2
63	3
21	3
7	7
1	

Así 1224 se descompone en factores primos como:
$1224 = 2^3 \times 3^2 \times 17$
y 126 se descompone en factores primos como:
$126 = 2 \times 3^2 \times 7$
de donde el M.C.D. (1224, 126) es igual a $2 \times 3^2 = 18$.

CAPÍTULO II

SISTEMAS DE NUMERACIÓN

RESEÑA HISTÓRICA

Desde la antigüedad, nuestros antepasados han venido tratando de expresar todos los números con base en un número finito de símbolos, que se conoce como base de un sistema de numeración. Cuando el hombre comenzó a contar usó los dedos, marcas en bastones o nudos en cuerdas para pasar de un número a otro, pero para números grandes se le hacía necesario un sistema de representación que fuese más práctico. Así, cuando se llegaba a un determinado número se hacía, por ejemplo, una marca distinta que los representaba a todos ellos. Este número es lo que se conoce como la base. Se continúa agregando unidades hasta cuando llega el momento en que hay que colocar otra marca de la segunda clase. Cuando se alcanza un número determinado de estas unidades de segunda clase, se agrega una de tercera clase y así sucesivamente.

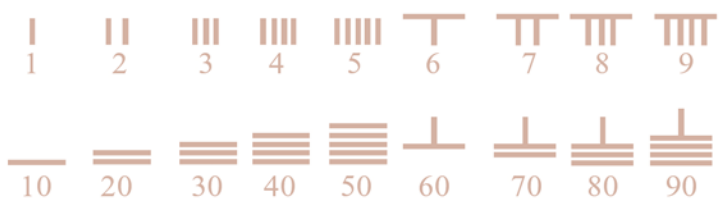
Tanto la historia de la Matemática como la Arqueología, nos han permitido conocer de la existencia de un gran número de sistemas de numeración. Bourbaki (1968) señala que: "*La finalidad inicial de un sistema de numeración es asignar a cada número natural individual (con un límite que depende de las necesidades prácticas) un nombre y una representación escrita, formada por combinaciones de un reducido número de signos, efectuados siguiendo leyes más o menos regulares*" (p. 65). A medida que la representación de los números sea más breve, tanto en su escritura como en su lectura, el sistema en que se representa dicho número es mejor.

El sistema posicional de numeración es un sistema para expresar los números, en donde el lugar en el que se ubica un dígito, determina el valor del mismo. Sólo tres culturas, además de la india, lograron desarrollar un sistema de este tipo: babilonios, chinos y mayas.

El primer sistema posicional de numeración conocido es el de los babilonios, que corresponde a los alrededores del año 2000 a.C. Los números, en el sistema de numeración babilónico, están representados básicamente por dos signos: una cuña vertical que representa la unidad, la cual se repite hasta nueve veces y la cuña horizontal, que representa las decenas y se repite hasta 5 veces, tal como se muestra en las figuras:

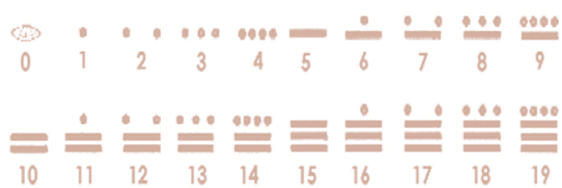
La combinación de estos dos símbolos, la cuña vertical y la horizontal, permite escribir los números desde el 11 hasta el 59.

La escritura de los números en China, data de los inicios del año 1500 a.C. Al principio, los chinos utilizaron dos sistemas de notación: uno de ellos denominado multiplicativo y el otro posicional. El primero de ellos, el multiplicativo, es de base diez y sus símbolos presentaban algunas dificultades de interpretación. En el sistema posicional, los numerales eran representados basándose en varillas. Los dígitos del 1 al 9 y las decenas del 10 al 90, se representaban por los símbolos que se muestran en la figura:



Con estos dieciocho símbolos, se alternaban, para representar cualquier número, el cual era escrito de derecha a izquierda, siguiendo la regla del Principio de Posición. La época exacta en que aparecieron los símbolos con base en varillas, aún no ha sido determinada, pero su utilidad fue extraordinaria en la confección de distintos tipos de tablas para realizar cálculos.

Boyer (1987), señala que los Mayas de Yucatán utilizaban la numeración posicional, para representar intervalos de tiempo entre distintas fechas de su calendario, generalmente con 20 como base principal y 5 como base auxiliar. Los Mayas escribían sus símbolos en vertical, de abajo hacia arriba, en niveles, de acuerdo con los criterios de agrupamiento simple para los números menores a 20. Con el caparazón de una tortuga representaban el cero y con un punto la unidad. Dos, tres y cuatro puntos representaban los números 2,3 y 4. El 5 era representado por una raya horizontal y cuando se añadían sucesivamente puntos a la raya, se lograba representar hasta el 9. Dos rayas horizontales representa el 10 y al incorporar los puntos se logra representar 11, 12, 13, y 14. El 15 es representado por 3 rayas horizontales y tal como se ha hecho en los dos casos anteriores con los puntos, se obtiene la representación de 16, 17, 18 y 19.



Gómez (1993), nos señala que: “*para los números mayores que 20 se sigue la regla de los sistemas posicionales*” (p. 39). Los Mayas a partir de las unidades de tercer orden no utilizaban 20 x 20 = 400, sino usaban 360 = 18 x 20, para adecuar los números al calendario.

Nuestro sistema de numeración, el decimal, es de base diez y surge de los trabajos de los árabes. La primera obra conocida sobre el sistema decimal, Tratado de Aritmética, fue escrita por Al-Huarizmi (780-850), cuyo contenido fue básicamente sobre la realización de las operaciones entre decimales. Los hindúes, antes del siglo VII, idearon el sistema tal y como lo conocemos hoy, con sólo cambios en la forma en la que escribimos los nueve dígitos y el cero. Con el surgimiento de la ciencia moderna en el año 1534 debido a los trabajos de Copérnico, Principios Matemáticos de la Filosofía de Newton en 1687 y las grandes transformaciones sociales que caracterizaron la época, surge un enorme interés en el sistema decimal.

El sistema de numeración binaria o de base dos, es un sistema numérico posicional dotado de dos dígitos para representar los números 0 y 1. El filósofo y teólogo alemán Gottfried Leibniz (1646-1716) fue el primero en interesarse por el sistema binario y debido a sus tareas espirituales, estableció una analogía entre el sistema binario y la creación del universo, tal como se relata en el Génesis; según él, el universo es creado del vacío (0) por Dios (1). Los adelantos científicos que se han dado con la introducción de las computadoras, han puesto en uso el sistema de numeración en base dos. Se utiliza el sistema binario, porque la información es almacenada en un medio que admite dos estados posibles, los cuales se asocian al cero y al uno, a esto lo llaman bit. También las computadoras utilizan el sistema de numeración en base 16 o hexadecimal y usa los dígitos 0,1,2,3,4,5,6, 7,8,9,A,B,C,D,E,F. El sistema de numeración hexadecimal trata la información agrupando los bits de 4 en 4, resultando 16 estados posibles.

Dentro de los sistemas de numeración no posicionales, están el egipcio y el romano.

El sistema de numeración egipcio es introducido en el siglo VIII a.C. Sus símbolos se pueden escribir, tanto de derecha a izquierda como de izquierda a derecha, también aparecen escritos de arriba hacia abajo. Los egipcios tenían dos sistemas de numeración: el sistema jeroglífico, que era el utilizado por el pueblo, y el sistema hierático o sistema de los sacerdotes. Los dos sistemas son de base diez, pero el principio de repetición utilizado en el sistema jeroglífico, es sustituido por un símbolo especial en el sistema hierático.

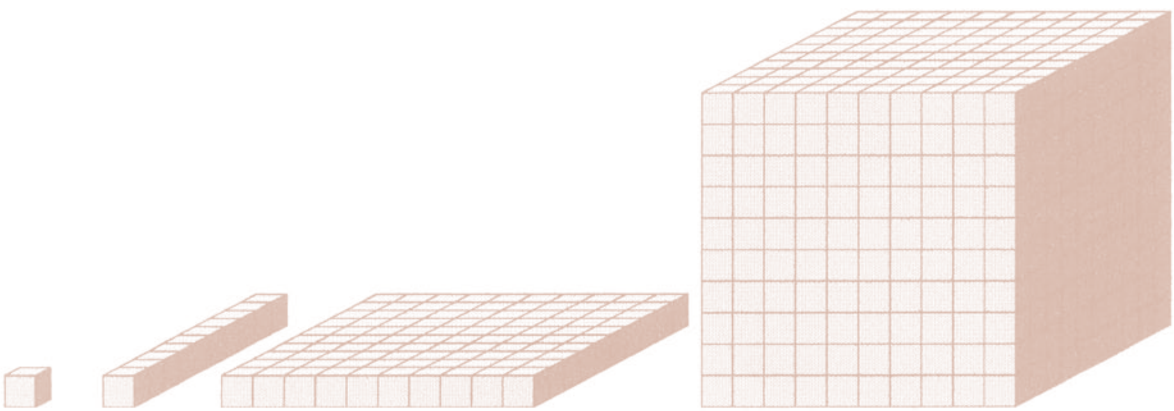
La numeración romana es un ejemplo de sistema de numeración no posicional, que expresa los símbolos por medio de las siguientes letras:

I = 1 V = 5 X = 10 L = 50 C = 100 D = 500 M = 1000

Es importante señalar que este sistema se utiliza hoy día en las Ciencias de la Salud y su escritura se realiza con el concurso de cuatro reglas básicas.

ALGUNOS RESULTADOS DE INVESTIGACIONES

Para operar en el sistema de numeración decimal, es indispensable el conocimiento del carácter posicional de este sistema. El valor posicional de las cifras es una noción básica para que los niños puedan realizar las operaciones fundamentales de la Aritmética como lo son la adición, sustracción, multiplicación y división. En Orton (1990) se señala que: "*Considerando que el desarrollo de nuestro presente sistema numérico requirió un largo tiempo, no es sorprendente que algunos niños se muestren muy lentos a la hora de captar todas las implicaciones de la notación y su estructura conceptual subyacente*" (p. 22); además nos presenta una serie de investigaciones sobre la comprensión del valor posicional por parte de los niños. Entre estas investigaciones cita la realizada por Barker, quien efectuó una serie de entrevistas y test en los que le solicitaba a niños de 7 a 9 años escribir, por ejemplo, el número 209, y comprobar que un 25% de los niños de 7-8 años escribió 2009, pero que sólo el 5% de los niños de 8-9 años cometió este error. Según Piaget, los niños aprenden realizando abstracciones a partir de situaciones concretas en las que participen activamente, por lo que los Bloques Aritméticos Multibases de Dienes proporcionan un adecuado entorno de aprendizaje que permite la construcción del conocimiento del valor posicional de las cifras en un número dado. Los Bloques de Dienes consisten en cubitos que representan la unidad, regletas formadas por 10 cubitos, tablas planas formadas por 10 regletas y bloques equivalentes a 10 tablas planas, tal como se ilustra en la figura:



Estos Bloques de Dienes, aquí presentados, están concebidos para la comprensión de la base diez, pero existen otros bloques para otras bases numéricas. Este aparato permite asociar el cubito con la unidad, la regleta de 10 cubitos con la decena, la tabla plana de10 regletas o decenas con la centena y el bloque conformado por 10 tablas planas o centenas, con la unidad de millar.

El sistema de numeración decimal, es fundamental para comprender las expresiones numéricas y la comunicación de ellas. Los maestros en formación se enfrentan al sistema de numeración decimal desde sus primeros años de escuela, pero visto como tema de enseñanza en su formación resulta insuficiente, lo que aumenta las dificultades en los maestros, al momento de enseñar a los alumnos.

En el resumen informativo de febrero 2002, del Ministerio de Educación Cultura y Deporte de España, aparece un informe de la evaluación de la educación primaria 1999, en el que se señala que en una muestra de 10 743 alumnos, más de la mitad de los alumnos presentan dificultades con el sistema de numeración decimal, al menos con el valor de posición, cuando en la composición de un número falta una unidad de medida intermedia. Así, el 50% considera que el número formado por 5 unidades, 6 decenas y 2 centenas es mayor que el formado por 3 centenas y 2 unidades. Además, presentan dificultades cuando comparan números como: 5×10^3, 2538, 10000/100, $(7 \times 10) \times 10$, el 30% eligió 2538 como el mayor de estos números.

En algunos países se utilizan muchos recursos didácticos en la enseñanza, sin embargo, el manejo del sistema de numeración por parte de los niños sigue constituyendo un problema. Se han realizado investigaciones en que se encuentra que los niños no comprenden las reglas que regulan el sistema de numeración decimal posicional, lo que acarrea dificultades en las operaciones básicas, ya que no logran visualizar las relaciones entre la organización del sistema decimal y los algoritmos.

En la última década, se ha prestado mucha atención a los contenidos sobre estimación, contemplados en el currículo. Esto ha generado numerosos estudios que muestran que las destrezas de las personas en estimación, están relacionadas con la comprensión de las operaciones numéricas, de los conceptos de posición numérica y de la habilidad de trabajar con potencias de diez. Todo esto es una manifestación del conocimiento del sistema de numeración de base diez, unido al desarrollo del sentido numérico. Desde esta perspectiva, el sistema de numeración de base diez, ocupa un lugar importante en los contenidos de enseñanza en la Educación Primaria o Básica General.

En algunos textos se enfatiza en los agrupamientos, pero los resultados no son alentadores, ya que los niños no logran establecer relaciones entre las agrupaciones y la escritura numérica. De igual manera, se utilizan colores vivos y figuras que representan unidades, decenas y centenas, pero las dificultades persisten. Esto nos lleva a presentar actividades en la que los maestros en formación construyan la parte conceptual, con el propósito de que se fortalezca el buen uso del sistema decimal.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: SISTEMAS DE NUMERACIÓN

ACTIVIDAD 2-1

En una escuela de formación de maestros, una alumna le solicita a su profesor de Matemática que le explique cómo ayudar a comprender con ejemplos reales, la descomposición de un número en potencias de 10, a los niños de escuelas de regiones apartadas donde escasean los recursos didácticos. El profesor ilustra a la alumna, con un ejemplo, para que ella lo adapte a la realidad de la región y en el contexto adecuado para los niños.

La explicación se centra en una industria de galletas, que las empaca para la venta, en paquetes de diferentes tamaños. Las galletas comienzan a empacarse en pequeños paquetes de 10 galletas cada uno. Luego estos pequeños paquetes se empacan en una segunda clase de paquetes de 10 pequeños paquetes cada uno. De donde esta segunda clase de paquetes contendrá $10 \times 10 = 10^2 = 100$ galletas. Además, para los comercios de más demanda, se hace una tercera clase de paquetes con 10 de los paquetes de segunda clase. Así, un tercer paquete contendrá $10 \times 10^2 = 10^3 = 1000$ galletas.

El profesor continúa explicando que si a un determinado comercio le interesa comprar 900 galletas, entonces la industria le vende 9 paquetes de la segunda clase, es decir, le vende $9 \times 10^2 = 9 \times 100 = 900$, de donde el número 900 se descompone como $900 = 9 \times 10^2 + 0 \times 10^1 + 0 \times 10^0$. Si comercios grandes piden 4370 galletas, la industria le despacha 4 paquetes del tercer tamaño, o sea $4 \times 10^3 = 4 \times 1000$ galletas, 3 paquetes del segundo tamaño o lo que es igual a $3 \times 10^2 = 3 \times 100$ galletas y 7 pequeños paquetes, es decir, 7×10 galletas. Por lo tanto, el número 4370 se descompone como $4370 = 4 \times 10^3 + 3 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 0 \times 10^0$.

El profesor termina diciendo a la alumna, que el maestro debe buscar ejemplos reales que estén en el contexto de los niños, para que el aprendizaje tenga significado para ellos. Este es un ejemplo oportuno para reforzar el concepto de millar, centena, decena y unidades.

ACTIVIDAD 2-2

En un seminario para maestros en servicio, el facilitador le pide a un grupo de cinco maestros que explíquen al resto de sus compañeros, por qué nuestro sistema de numeración es posicional de base diez y además les solicita que determinen el valor relativo de las cifras que conforman el número 456 231 798.

El grupo de maestros presenta al resto del salón, el siguiente cuadro y explica que nuestro sistema de numeración se basa en agrupamientos de diez en diez y el número que regula estos agrupamientos se conoce como la base del sistema.

1 unidad		10^0
10 unidades	1 decena	10^1
10 decenas	1 centena	$10 \times 10 = 10^2$
10 centenas	1 unidad de millar	$10 \times 10 \times 10 = 10^3$
10 unidades de millar	1 decena de millar	$10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^4$
10 decenas de millar	1 centena de millar	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^5$
10 centenas de millar	1 unidad de millón	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^6$
10 unidades de millón	1 decena de millón	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^7$
10 decenas de millón	1 centena de millón	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^8$
10 centenas de millón	1 unidad de millar de millón	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^9$
10 unidades de millar de millón	1 decena de millar de millón	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^{10}$
10 decenas de millar de millón	1 centena de millar de millón	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^{11}$
10 centenas de millar de millón	1 unidad de billón	$10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10 = 10^{12}$

Uno de los integrantes del grupo sigue explicando: “*En el sistema de numeración decimal las cifras representan un valor que depende de la posición que ocupa en el número; esta característica corresponde a los sistemas de numeración posicional. Cada potencia de diez está relacionada con el orden que le corresponde, así por ejemplo, 10^0 está relacionada con las unidades; 10^1 está relacionada con las decenas; 10^2 con las centenas y así sucesivamente, tal como se muestra en el cuadro*”.

Por lo que el número 456 231 798 está conformado por:
4 centenas de millón
5 decenas de millón
6 unidades de millón
2 centenas de millar
3 decenas de millar
1 unidad de millar
7 centenas
9 decenas
8 unidades.

Luego:
456 231 798 = $4x10^8 + 5x10^7 + 6x10^6 + 2x10^5 + 3x10^4 + 1x10^3 + 7x10^2 + 9x10^1 + 8x10^0$.

ACTIVIDAD 2-3

En el cuadro de la ACTIVIDAD 2 -2, los maestros que asistieron al seminario pudieron notar que en el sistema de numeración decimal:

Cada diez unidades representan una decena.
Cada diez decenas representan una centena.
Cada diez centenas representan una unidad de millar y así sucesivamente. Es decir, cada diez unidades de un orden representan una unidad del orden inmediato superior.

Luego, el grupo de maestros que exponía el cuadro, pregunta al grupo de maestros asistentes al seminario: ¿Podrían Uds. comparar una unidad con una decena? ¿Y una decena con una centena?

Uno de los maestros asistentes al seminario respondió: “*Si diez unidades hacen una decena, entonces una unidad es la décima parte de una decena, y una decena es la décima parte de una centena*”.

Otro de los maestros intervino y preguntó: *“¿Entonces también podría pensar en la décima parte de una unidad?”.*

El facilitador del seminario aprovechó la oportunidad y le propuso a otro grupo de cinco maestros una ampliación de la información que había presentado el grupo que investigó sobre el sistema de numeración decimal.

Este nuevo grupo expuso el siguiente cuadro:

millar de millón	1 000 000 000	10^{9}
centena de millón	100 000 000	10^{8}
decena de millón	10 000 000	10^{7}
unidad de millón	1 000 000	10^{6}
centena de millar	100 000	10^{5}
decena de millar	10 000	10^{4}
unidad de millar	1 000	10^{3}
centena	100	10^{2}
decena	10	10^{1}
UNIDAD	1	10^{0}
décimo	0,1	10^{-1}
centésimo	0,01	10^{-2}
milésimo	0,001	10^{-3}

En algunos países, como en los Estados Unidos, se utiliza el punto decimal en vez de la coma, que tiene la finalidad de distinguir la parte entera de la parte decimal del número.

El grupo de maestros continúa explicando el valor posicional de las cifras en un número dado.

Ejemplo:
342,245 está conformado por:
3 centenas
4 decenas
2 unidades
2 décimos
4 centésimos
5 milésimos.

Luego $342{,}245 = 3 \times 10^{2} + 4 \times 10^{1} + 2 \times 10^{0} + 2 \times 10^{-1} + 4 \times 10^{-2} + 5 \times 10^{-3}$.

ACTIVIDAD 2-4

Un niño de IV grado realiza su tarea sobre multiplicación de números naturales:

$$\begin{array}{r} 345 \\ \underline{\times\ 246} \\ 2070 \\ 1380 \\ \underline{690} \\ 84870 \end{array}$$

Y luego le pregunta a su maestra: ¿Por qué tengo que correr las cifras hacia la izquierda? ¿Las podría haber corrido hacia la derecha?

La maestra le explica que esto se debe a que está haciendo uso del sistema de numeración decimal, además de la aplicación de la propiedad distributiva de la multiplicación. Al multiplicar 345 por 246, en la primera fila de los resultados parciales de la multiplicación está el resultado de multiplicar 345 por 6 unidades, lo cual da 2070 unidades, luego multiplica 345 por 4 decenas y obtiene 1380 decenas, y finalmente, multiplica 345 por 2 centenas y obtiene 690 centenas. Luego debe sumar estos resultados parciales, pero para ello deben estar en unidades de un mismo orden, por lo que hace las siguientes conversiones:

2070 unidades = 2070 unidades
1380 decenas = 1 380 x 10 unidades = 13 800 unidades
690 centenas = 690 x100 unidades = 69 000 unidades.

Por lo que:

$$\begin{array}{r} 345 \\ \underline{\times\ 246} \\ 2070 \\ 1380\mathbf{0} \\ \underline{690\mathbf{00}} \\ 84870 \end{array}$$

Al decir, se corren las cifras hacia la izquierda, lo que implícitamente se hace, es transformar las decenas y las centenas en unidades, por lo que correr las cifras hacia la izquierda corresponde a la colocación respectiva de las cifras para la suma.

Como la multiplicación es conmutativa, se hubiera podido empezar a multiplicar 345 por 2 centenas, luego por 4 decenas y finalmente por 6 unidades:

$$
\begin{array}{r}
345 \\
\underline{\times\ 246} \\
690\mathbf{00} \\
1380\mathbf{0} \\
\underline{2070} \\
84870
\end{array}
$$

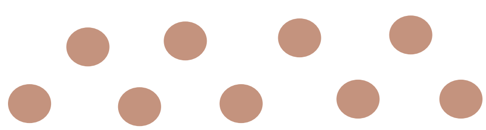
Por lo que las cifras se hubieran podido correr hacia la derecha, siempre que se empiece a multiplicar por las centenas:

$$
\begin{array}{l}
\ \ 345 \\
\underline{\times\ 246} \\
690 \\
1380 \\
\underline{\ \ 2070} \\
84870
\end{array}
$$

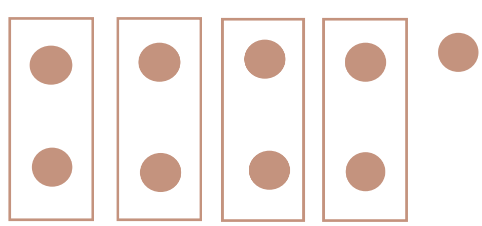
ACTIVIDAD 2-5

El grupo de VII grado de una escuela de la Básica General, ya estudió el sistema de numeración decimal y aprendió que éste surge de agrupamientos de 10 en 10, que hizo el ser humano para contar sus cosas. Un estudiante preguntó a su grupo: ¿Qué sucedería si los agrupamientos se hicieran de dos en dos? ¿Podríamos haber tenido un sistema de numeración de base dos? ¿Cómo se escribiría un número en ese sistema?

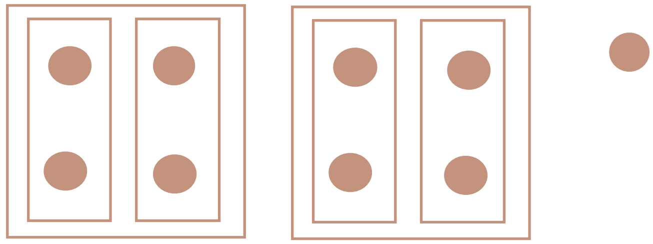
Otro compañero le responde: imagínate que tuvieras 9 bolas,



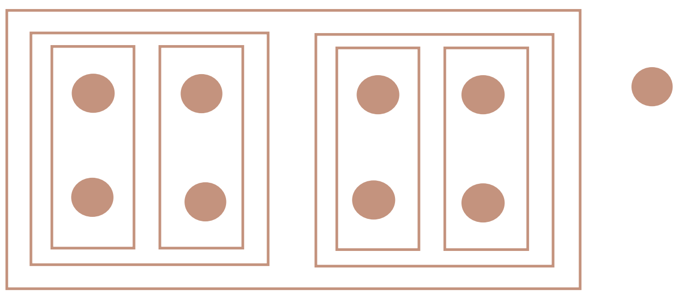
vamos a agruparlas de dos en dos



tuviéramos cuatro grupos de dos bolas cada uno y sobraría una bola, es decir, 4 x 2 + 1; luego este primer agrupamiento podríamos volver a agruparlo en grupos de 2:



y obtendríamos dos agrupamientos formados por dos grupos de dos bolas cada uno y sobraría una bola, es decir: 2 x (2 x 2) + 1, y si volviéramos a agruparlas de dos en dos tendríamos:



un agrupamiento de dos grupos en que cada grupo tiene dos agrupaciones de dos bolas cada uno y sobraría una, es decir: 1 x [2 x (2 x 2)] + 1 que es igual a $1 \times 2^3 + 1 \times 2^0$.

Observa, dice el compañero que está explicando lo de los agrupamientos de dos en dos, que tenemos el 9 en potencias de 2 y es posible escribirlo con 1 y 0, que como aprendimos son los únicos números que pueden utilizarse si la base del sistema es dos. Luego: $9 = 1 \times 2^3 + 0 \times 2^2 + 0 \times 2^1 + 1 \times 2^0$ y escribiríamos: 1001 en base dos que se denota como: $\mathbf{(1001)_2}$.

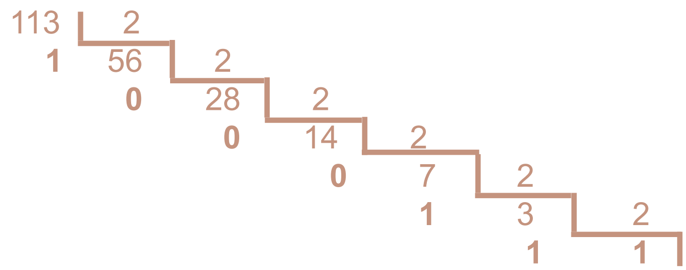
Así, que respondiendo a tu pregunta, sí podemos hacer agrupamientos de dos en dos, por lo que **hay un sistema de numeración de base dos que se llama Sistema Binario**.

¿Podría haberse hecho agrupamientos de tres en tres? ¿Cómo se expresaría 9 en base tres?

ACTIVIDAD 2-6

Con el propósito de comprender cómo los números en el sistema de base 10 son utilizados por las computadoras en el sistema de base 2, la maestra enseña a sus alumnos a transformar los números de una base a otra. Comienza explicándoles que las computadoras tienen como unidad básica de memoria el **bit**,el cual sólo puede tomar dos valores: activo e inactivo. Estos valores los codifica como **1** para **activo** y **0** para **inactivo**.

La maestra explica que para transformar un número que está escrito en base 10 a base 2, se divide el número por 2 y se va dividiendo el cociente por 2, hasta encontrar un cociente menor que 2, el cual sólo puede tomar dos valores: activo e inactivo. Estos valores los codifica como **1** para **activo** y **0** para **inactivo**.



Uno de los alumnos le señala a la maestra, que el primer resto que es **1** corresponde a la posición cero del bit, en la escritura del número en base 2, que el segundo resto que es **0** corresponde a la posición uno del bit, en la escritura del número en la base 2 y así sucesivamente, de manera análoga como sucede con la escritura de un número en base 10.

La maestra muy satisfecha de la observación, continúa diciendo que el último cociente y los restos forman los dígitos del número 113 en base 2.

La maestra agrega, que si revisan la ACTIVIDAD 2-5 pueden verificar que el algoritmo corresponde a la descomposición en grupos de 2, tal como se planteó en la citada actividad.

Así que el número 113 en base 2 se escribe así:
$113 = (1110001)_2$.

La maestra les explica además, mediante una tabla, la posición de cada bit para que observen cómo se descompone en el sistema decimal:

Posición del bit	**6**	**5**	**4**	**3**	**2**	**1**	**0**
Valor binario	1	1	1	0	0	0	1
Valor posicional	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
Valor decimal	64	32	16	8	4	2	1
Valores a sumar	64	32	16	0	0	0	1
Resultado	64 + 32 + 16 + 1 = 113						

Se deduce del cuadro sobre el valor binario y el valor posicional que:
$(1110001)_2 = 1 \text{ x } 2^6 + 1 \text{ x } 2^5 + 1 \text{ x } 2^4 + 0 \text{ x } 2^3 + 0 \text{ x } 2^2 + 0 \text{ x } 2^1 + 1 \text{ x } 2^0$.

ACTIVIDAD 2-7

Una maestra desea saber cuántos números de **n** dígitos existen en el sistema decimal, en el binario y en el de base 3. ¿Cómo lo calcularía? ¿Cuántos números de **n** dígitos existen en un sistema de base **a**?

Para mejor comprensión, elabora una tabla después de haber analizado las posibilidades.

Número de digitos	Cantidad de números en base 10	Cantidad de números en base 2	Cantidad de números en base 3
1	10	2	3
2	9×10	1×2	2×3
3	9×10^2	1×2^2	2×3^2
4	9×10^3	1×2^3	2×3^3
⋮	⋮	⋮	⋮
n	$9 \times 10^{n-1}$	$1 \times 2^{n-1}$	$2 \times 3^{n-1}$

La maestra señala que la primera posición de izquierda a derecha, de un número con más de un dígito, no puede ser ocupada por el 0.

La maestra se percata de la relación que existe en la cantidad de números en base 10, 2 y 3 y generaliza a un sistema de base **a** y conjetura que existe $(\mathbf{a} - \mathbf{1}) \times \mathbf{a}^{n-1}$ números de **n** dígitos en base **a.**

ACTIVIDAD 2-8

Los alumnos han aprendido que en el sistema de numeración decimal:

$10^0 = 1$

$10^1 = 10$

$10^2 = 100$

$10^3 = 1000$

.

.

.

$10^n = 1\underbrace{0....0}_{\text{n veces}}$; es decir, se escribe 1 seguido de tantos ceros como indique el exponente al cual esté elevada la base 10.

Uno de los alumnos del grupo pregunta al profesor, si esto también sucederá al escribir un número en otro sistema de numeración de base distinta a 10.

El profesor en vez de dar una respuesta inmediata, le propone que complete la siguiente tabla con las potencias de 2 escritas en base 2 y que luego saque sus conclusiones.

El estudiante después de llenar la tabla la presenta al profesor:

Potencias de 2	Escritura en base 2
2^0	$1x2^0 =$ **1**
2^1	$1x2^1 + 0x2^0 =$ **10**
2^2	$1x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 =$ **100**
2^3	$1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 =$ **1000**
2^4	$1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 =$ **10000**
2^5	$1x2^5 + 1x2^4 + 1x2^3 + 0x2^2 + 0x2^1 + 0x2^0 =$ **100000**

El estudiante expone al profesor y al grupo su análisis:

“Si sigo escribiendo las potencias de 2 en base 2 tendré que:
$2^n = 1x2^n + 0x2^{n-1} + 0x2^{n-2} + 0x2^{n-3} + ... + 0x2^0 = (1\underbrace{000...0}_{\text{n veces}})_2$ ”.

“Lo mismo sucedería, por ejemplo, si escribo 3^4 en base 3. Tendría que:
$3^4 = 1x3^4 + 0x3^3 + 0x3^2 + 0x3^1 + 0x3^0 = (10000)_3$ ”.

Y “si expreso 5^3 en base 5, tendría:
$5^3 = 1x5^3 + 0x5^2 + 0x5^1 + 0x5^0 = (1000)_5$
y así podría hacerlo al escribir cualquier potencia en su propia base”.
Luego si escribo $\mathbf{a^n}$ en base **a** se tiene que : $\mathbf{a^n}$ **es igual a 1 seguido de tantos ceros como indique el exponente n al cual está elevada la base a**.

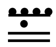
El estudiante, que en un principio hubiera preferido que el profesor le diera la respuesta, se sintió satisfecho de haberla encontrado él mismo.

ACTIVIDAD 2-9

Con motivo de la celebración de la Independencia de Centroamérica, el 15 de septiembre, la directora de una escuela invitó al Agregado Cultural de la Embajada de Guatemala, para que dictara una conferencia sobre la historia de ese país, a los estudiantes de quinto y sexto grado. Uno de los tópicos, presentado por el distinguido conferencista, fue el Sistema de Numeración Maya. Señaló que era posicional y de base 20; además, sus símbolos numéricos eran escritos en columna y, que en el más bajo nivel se encuentra la unidad. Él hizo énfasis en el hecho de que sólo se utilizaban tres símbolos

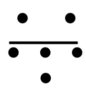
(. __ 0) para representar los números, y presentó los siguientes ejemplos:

 $= (3 \times 5 + 3) \times$

 $= (3 \times 5 + 1) \times 20^0 + (5 + 4) \times 20^1$.

Es importante anotar, que los números representados por los símbolos que ocupan la primera posición, son multiplicados por 20^0 y los que ocupan la segunda posición, son multiplicados por 20^1.

Los números representados por los símbolos que ocupan la tercera posición (de abajo hacia arriba), son multiplicados por $18 \times 20 = 360$ en lugar de $20^2 = 400$, tal como se indicó en la parte histórica; se cree que esto se debe al hecho de que el año Maya consta de 360 días. El Agregado Cultural ilustra con otro ejemplo cómo se transforma un número en escritura Maya al sistema de numeración decimal:

 $= (5+1) \times 20^o + 3 \times 20^{\cdot} + (5+2) \times 18 \times 20$

$= 6 \times 1 + 3 \times 20 + 7 \times 18 \times 20$
$= 6 + 60 + 2520$
$= 66 + 2520$
$= 2586.$

Los números representados por los símbolos de la cuarta posición son multiplicados por $18 \times 20''$ $= 7200$.

ACTIVIDAD 2-10

En la escuela primaria de una comunidad está el siguiente mural:

EL SISTEMA DE NUMERACIÓN ROMANO

El sistema de numeración romano no es posicional, ya que el valor de cada símbolo no depende del lugar que ocupa en el numeral; por lo tanto, no hay un símbolo para el cero. Este sistema usa siete símbolos a saber:

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Reglas para combinar los símbolos y escribir los números romanos:

1. Cuando se escriben dos símbolos distintos:
Si el de menor valor está a la derecha, se suma

Ejemplo:
VI = 6 XI = 11 LX = 60 CX =110 DC = 600.

Si el de menor valor está a la izquierda , se resta

Ejemplo:
IV = 4 IX = 9 XL = 40 XC = 90 CD = 400.

2. Sólo se pueden restar los símbolos:

I X C

El símbolo I sólo se resta de V y X
El símbolo X sólo se resta de L y C
El símbolo C sólo se resta de D y M

Ejemplos:
IV = 4 IX = 9 XL= 40 XC = 90 CD = 400 CM = 900.

3. Los símbolos I, X, C, M son los únicos que se repiten, pero no pueden hacerlo más de tres veces seguidas.
Ejemplos:

III = 3 XXX = 30 CCC = 300 MMM = 3000.

4. Para números mayores que 3999 se colocan tantas rayas horizontales sobre los símbolos como se quiera multiplicar éstos por 1000.
Ejemplos:

$\overline{\text{XIII}}$ = 13 000 $\overline{\text{VII}}$ = 7 000 $\overline{\text{XLV}}$ = 45 000.

Un padre de familia observa el mural y comprueba que la hija haya realizado bien la tarea que consiste en:

a) transformar los siguientes números del sistema de numeración decimal al de numeración romano:

76 = LXXVI
304 = CCCIV
869 = DCCCLXIX
2522 = MMDXXII
2002 = MMII

b) transformar los siguientes números romanos al sistema de numeración decimal:

LVII = 57
CDXXIX = 429
$\overline{\text{M}}$MMDXCII = 3 592
IVXVII = 4 017
CCXLIX = 249

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

1) Las siguientes expresiones corresponden a la descomposición de un número en base 10, determine el número:

a) $2 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0$
b) $3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^0$
c) $9 \times 10^3 + + 8 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-3}$
d) $4 \times 10^2 + 7 \times 10^{-2}$.

2) Descomponga los siguientes números en potencias de 10:

a) 8 009
b) 67,23
c) 9,007.

3) La primera columna del siguiente cuadro, tiene los números del 0 al 10 en el sistema de numeración decimal. Debe completarlo con la escritura de cada uno de ellos en las distintas bases y luego responder y reflexionar sobre las interrogantes que se plantean al final.

base 10	base 9	base 8	base 7	base 6	base 5	base 4	base 3	base 2
0								
1								
2								
3								
4								
5								
6								
7								
8								
9								
10								

a) ¿Cómo se escribe 0 en cualquier base?
b) ¿Cómo se escribe 1 en cualquier base?
c) ¿Cómo se escribe un número en su propia base?

4) El número 367 está escrito en el sistema de base 8. Escriba el número en el sistema binario.

5) Un número se escribe 1326 en base diez y en base **a** se escribe 7β0. Determine **a** si β **= 11**.

6) En la tabla de la ACTIVIDAD 2-7 se puede observar que en el sistema de numeración decimal se forman 90 números de dos cifras o dígitos. ¿Cuántos se pueden formar en el sistema de numeración romano, utilizando dos símbolos?

SUGERENCIAS DE SOLUCIÓN

1) Multiplique cada factor por la potencia de 10 indicada y luego sume:

a) $2 \times 10^4 + 6 \times 10^3 + 7 \times 10^2 + 1 \times 10^1 + 8 \times 10^0 = 2 \times 10\,000 + 6 \times 1\,000 + 7 \times 100 + 1 \times 10 + 8 \times 1$
$= 26\,718$

b) $3 \times 10^3 + 4 \times 10^2 + 7 \times 10^0 = 3 \times 1\,000 + 4 \times 100 + 7 \times 1$
$= 3407$

c) $9 \times 10^3 + 8 \times 10^0 + 4 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-3} = 9 \times 1\,000 + 8 \times 1 + 4 \times 0{,}1 + 3 \times 0{,}001$
$= 9\,008{,}403$

d) $4 \times 10^2 + 7 \times 10^{-2} = 4 \times 100 + 7 \times 0{,}01$
$= 400{,}07$

2) La descomposición en potencias de 10 de los números dados es:

a) $8\,009 = 8 \times 10^3 + 9 \times 10^0$
b) $67{,}23 = 6 \times 10^1 + 7 \times 10^0 + 2 \times 10^{-1} + 3 \times 10^{-2}$
c) $9{,}007 = 9 \times 10^0 + 7 \times 10^{-3}$

3) Al completar el cuadro con la escritura de cada uno de los números de la primera columna en las distintas bases se tiene:

base 10	base 9	base 8	base 7	base 6	base 5	base 4	base 3	base 2
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	2	2	2	2	2	2	2	10
3	3	3	3	3	3	3	10	11
4	4	4	4	4	4	10	11	100
5	5	5	5	5	10	11	12	101
6	6	6	6	10	11	12	20	110
7	7	7	10	11	12	13	21	111
8	8	10	11	12	13	20	22	1000
9	10	11	12	13	14	21	100	1001
10	11	12	13	14	20	22	101	1010

a) El número 0 en cualquier base se escribe 0
b) El número 1 en cualquier base se escribe **1**
c) Un número en su propia base se escribe **10.**

4) Como 367 está escrito en el sistema de base 8, se puede descomponer en potencias de 8, atendiendo a la posición de sus dígitos y se tiene:

$(367)_8 = 3 \times 8^2 + 6 \times 8 + 7 \times 8^0$. Como $8 = 2^3$ se tiene que:
$(367)_8 = (2 + 1) \times 2^6 + (2^2 + 2) \times 2^3 + (2^2 + 2 + 1) \times 2^0$, de donde:
$(367)_8 = 2^7 + 2^6 + 2^5 + 2^4 + 2^2 + 2 + 1$
Por lo tanto: $(367)_8 = (11110111)_2$.

5) Sabemos que $1\,326 = 7 \times a^2 + 11 \times a + 0$, de donde $7 \times a^2 + 11 \times a - 1326 = 0$
luego la única solución positiva de la ecuación es $a = 13$
Por lo tanto: 1 326 escrito en base 10 se escribe 7β0 en base 13. Ud. puede verificar que:
$(1\,326)_{10} = (7\beta 0)_{13}$

6) En el Sistema de Numeración Romano se pueden formar 31 números de dos símbolos. Para escribirlos todos, se sugiere empezar con los que comienzan con **I**, luego los que empiezan con **V**, después los que inician con **X**, y así sucesivamente, considerando las reglas dadas en la ACTIVIDAD 2 – 10. Estos números son:

II	VI	XI	LI	CI	DI	MI
IV		XV	LV	CV	DV	MV
IX		XX	LX	CX	DX	MX
		XL		CL	DL	ML
		XC		CC	DC	MC
				CD		MD
				CM		MM

CAPÍTULO III

INTERPRETACIÓN Y OPERACIONES CON FRACCIONES

RESEÑA HISTÓRICA

La Historia de la Matemática nos señala que las fracciones hacen su aparición con el surgimiento de las civilizaciones babilónica y egipcia. El término fracción proviene del latín ***"frangere"*** que significa quebrado. Smith (1958) cuenta que en Baker (1568) se habla de fracciones o números quebrados, mientras que otros escritores de la misma época hablan sobre quebrado de un quebrado.

Uno de los hechos que caracterizan la Matemática egipcia es la de haber desarrollado un algoritmo para operar con las fracciones, el cual es más complicado que el utilizado en el día de hoy. La Matemática de la cultura egipcia, ha llegado hasta nosotros a través de los escritos del "*escriba*" Ahmes quien, de manera magistral, nos señala en el Papiro de Rhind que los egipcios que vivieron aproximadamente unos 3000 años antes de Cristo, desarrollaron una clase de fracciones denominadas fracciones unitarias o recíproco de un número natural, cuya notación es de la forma $\frac{1}{n}$ donde **n** es un número natural, distinto de cero. Las fracciones con numeradores distintos de uno, se expresan como la suma de fracciones. Uno de los ejemplos clásicos es la representación de la fracción $\frac{3}{4}$. Entre sus representaciones se tiene: $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$.

Otra representación surge del hecho de que los egipcios sabían que:

$$1 = \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} .$$

Si se divide entre 4 la expresión anterior se obtiene:

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} .$$

Al sustituir esta expresión en la representación de $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4}$, resulta:

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{8} + \frac{1}{12} + \frac{1}{24} .$$

Las dos expresiones de $\frac{3}{4}$ nos indican que éste no tiene una representación única.

Con las fracciones unitarias, los egipcios desarrollaron los algoritmos necesarios para realizar las operaciones fundamentales y mostraron una gran capacidad para calcular los $\frac{2}{3}$ y $\frac{3}{4}$ de cualquier fracción unitaria.

El "*escriba*" Ahmes incluyó, al principio de su obra, una tabla en la que se expresan todas las fracciones de numerador 2 y denominador impar entre 5 y 101 como suma de fracciones unitarias. Ahmes transforma $\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28}$ como la suma de dos fracciones unitarias distintas. ¿Cómo lo obtiene?

Se desdobla $\frac{2}{7}$ y se obtiene: $\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7}$.

Se desdobla $\frac{1}{7}$, es decir: $\frac{1}{7} = \frac{1}{14} + \frac{1}{14}$.

Ahora se desdobla $\frac{1}{14}$ y resulta: $\frac{1}{14} = \frac{1}{} + \frac{1}{28}$

Luego se tiene:

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{7} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{14} = \frac{1}{7} + \frac{1}{14} + \frac{1}{28} + \frac{1}{28}$$

$$\frac{2}{7} = \frac{1}{4} + \frac{1}{28} .$$

Boyer (1987) señala que los babilonios supieron *extender el Principio posicional a las fracciones y no sólo a los números enteros*; esto permitió simplificar los cálculos con las fracciones en su sistema sexagesimal; además, la notación fraccionaria permitió calcular, con buena aproximación, algunas raíces cuadradas tales como $\sqrt{2}$.

Las primeras culturas griegas utilizaron fracciones unitarias, iguales a las utilizadas por los egipcios; los romanos, en cambio, no utilizaron numerales para representar las fracciones, en su lugar, empleaban palabras para indicar las partes del todo.

Smith (1958) señala que es probable que nuestro método para escribir las fracciones comunes se deba esencialmente a los hindúes, a pesar de que ellos mismos no utilizaron la línea fraccionaria.

Varias fuentes atribuyen el uso de la línea fraccionaria a los árabes. Fibonacci es el primer matemático europeo que utilizó la línea fraccionaria tal como se representa hoy, sin embargo, adoptó la forma de escritura de los árabes, al escribir la fracción a la izquierda del entero.

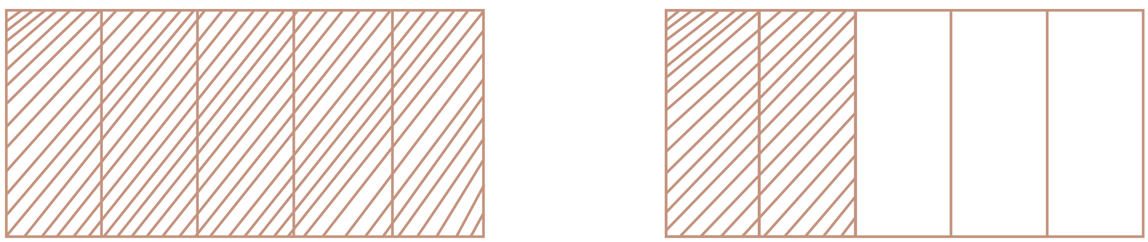
El uso de las fracciones es indispensable para quienes manejan a diario instrumentos de alta precisión; los investigadores en las distintas áreas de las ciencias naturales y exactas, requieren a diario de estos números para el desarrollo de sus investigaciones.

ALGUNOS RESULTADOS DE INVESTIGACIONES

Uno de los conceptos matemáticos fundamentales que se presenta en la escuela primaria es el de fracción. A diferencia de los números naturales, que pueden asociarse directamente con una cantidad, las fracciones se asocian con la relación de dos cantidades. El libro Avance (1998), señala que según Sowder(1988), a los alumnos del nivel elemental, se les dificulta concebir los números fraccionarios como una sola cantidad y los ven como un par de números enteros, y Kieren (1992) sostiene, que una forma adecuada de presentar los números fraccionarios consiste en las particiones en las que las fracciones se consideran como múltiplos de unidades básicas, por ejemplo: $\frac{3}{5} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5} + \frac{1}{5}$ y no tres de cinco partes. Además, los alumnos de primer grado de enseñanza media no perciben que $5\frac{1}{4}$ es lo mismo que $5 + \frac{1}{4}$ Los números naturales se utilizan para contar objetos discretos, las fracciones admiten diversas interpretaciones. Éstas podrían ser algunas de las razones de las dificultades que se presentan en su aprendizaje.

Entre las interpretaciones que se da a las fracciones se pueden señalar las siguientes: partes de un todo, una operación de división, una razón, una medida de cantidades continuas o discretas y un decimal. Cada una de estas interpretaciones, presenta un nivel de dificultad en los procesos de aprendizaje y enseñanza de las fracciones.

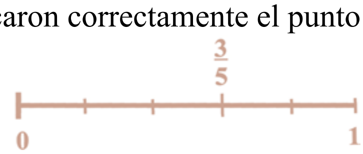
La interpretación de partes de un todo, por ejemplo, no se presta muy bien para representar fracciones impropias. Dickson, Brown & Gibson (1991) citan una investigación en la que se les preguntó a los niños entre 8 y 12 años, qué fracción representaba el siguiente diagrama:



Al no tener claro, en este caso, que la unidad de referencia de las fracciones es un rectángulo, muchos alumnos escribieron $\frac{7}{10}$ en lugar de $\frac{7}{5}$. Esta interpretación de la fracción, como parte de un todo "*Resulta incoherente con la existencia misma de dichas fracciones impropias*", (Dickson et al,1991, p. 299).

También citan Dickson et al. (1991) que en una investigación realizada por Novillis (1976), con niños de 10 a 12 años, la interpretación de la fracción como medida o modelo de recta numérica, resultaba más difícil que el de parte de un todo. Si se le solicitaba a los niños ubicar el punto representativo de $\frac{3}{5}$ en la recta numérica, la dificultad se agravaba al extender la recta más allá del uno:

Una gran cantidad de estudiantes ubicó el punto $\frac{3}{5}$ en el punto 3, ya que consideraron que éste $\frac{3}{5}$ era de 5. Sin embargo, cuando el segmento era definido solamente por los extremos 0 y 1, casi todos los niños de 12 años ubicaron correctamente el punto $\frac{3}{5}$.



Un estudio de fracciones del proyecto: Conceptos en Ciencias y Matemáticas (CSMS) citado por Hart (1981), informa que en una muestra de niños ingleses de 12 y 13 años, donde se les solicitaba que repartieran en partes iguales tres barras de chocolates entre cinco niños, y se les preguntaba: ¿Qué parte debía recibir cada niño?, el 33 % de los encuestados respondió correctamente $\frac{3}{5}$. Esto muestra que sólo $\frac{1}{3}$ de los niños habían interpretado correctamente la fracción, como el resultado de una división.

Uno de los conceptos más difíciles de comprender por el estudiante es el de razón. En un estudio llevado a cabo por Quintero (1988), en que le pedía a estudiantes entre 9 y 13 años que predijeran el color de diferentes mezclas de azúcar blanca y azúcar negra, la mayor parte de los estudiantes dijeron que una mezcla de 6 cucharadas de azúcar blanca con 8 cucharadas de azúcar negra, iba a ser más clara que una mezcla de 4 cucharadas de azúcar blanca mezclada con 3 cucharadas de azúcar negra, por contener más cucharadas de azúcar blanca. Sin lugar a dudas, estos niños se fijaron sólo en un elemento de la razón, sin tomar en consideración el otro. El conocimiento de esta interpretación de la fracción como razón, le permitirá al estudiante comparar la razón de 6 a 8 con la razón de 4 a 3, tal como se compararía $\frac{6}{8}$ con $\frac{4}{3}$.

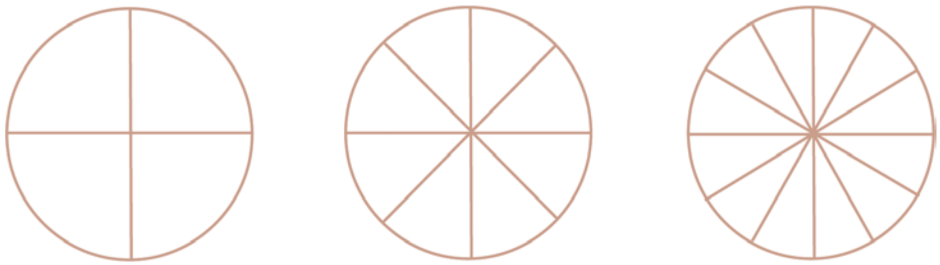
Como se vio en el capítulo II, los números decimales son la forma de expresar las fracciones en nuestro sistema de numeración decimal. Quintero (1988), en un estudio con jóvenes de séptimo grado, pudo constatar que éstos conocen las reglas para operar con números decimales, pero no tienen una representación clara de estos números. Los estudiantes no tuvieron dificultad en transformar números decimales a fracciones; el 60% de los entrevistados podía hacer los problemas de este tipo, sin embargo, no podía representar gráficamente números decimales en la recta numérica. Colocaron 0,7 en el número entero 7 y ubicaron a 0,06 y 0,7 antes del cero. Estos errores se deben, a que: "*El sistema conceptual del estudiante sobre los números decimales es un sistema desorganizado donde hay una serie de reglas pero no una representación que integre las mismas*" (Quintero, 1988, p.74). En Avances (1998) aparece señalado que según Hiebert (1992), las fracciones decimales muchas veces no son comprendidas por los alumnos de los últimos años del nivel elemental, como objetos concretos que se pueden medir con unidades, décimos de unidad o centésimos de unidad, entre otras unidades de medición.

A través de las actividades desarrolladas en este capítulo, se abordarán las diferentes interpretaciones de las fracciones.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: EQUIVALENCIA, COMPARACIÓN Y ORDEN EN LAS FRACCIONES

ACTIVIDAD 3-1

Un grupo de niños está reunido organizando una fiesta. La maestra les pide a tres niños que cada uno lleve una pizza con hongos del mismo tamaño. Al momento de repartir las pizzas encuentran que una está partida en cuatro partes iguales, otra en ocho, y una tercera en doce partes iguales, tal como se muestra a continuación:

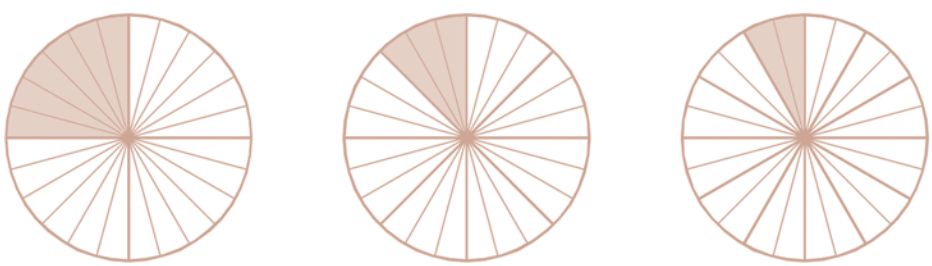


A la fiesta asisten la maestra y 23 niños; cada uno debe tomar la misma porción de pizza ¿Cómo debe lograr esto Juan, a quien se le asignó esta tarea?

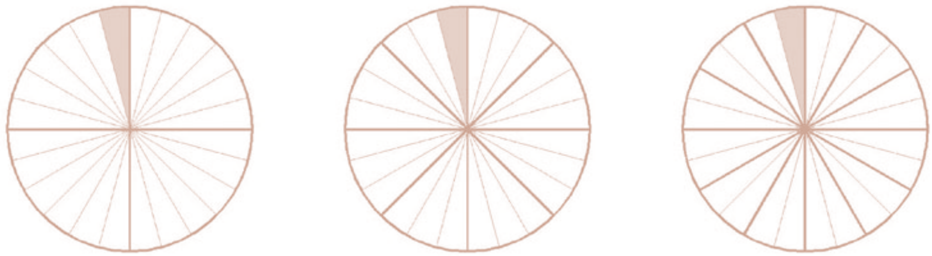
Uno de los compañeros de Juan le sugiere que le dé un pedazo a cada uno, pues en total tiene 24 pedazos, ya que una pizza tiene 4 pedazos, otra tiene 8 pedazos y la tercera tiene 12 pedazos.

Juan le dice que esa repartición no sería equitativa, pues los que tomarán de la pizza que está dividida en 4 pedazos comerían más, y a los que les toque de la de 12 pedazos comerían menos pizza. Juan prefiere dividir por la mitad cada uno de los 12 pedazos de la tercera pizza y así obtener 24 pedazos iguales, y darle a cada niño y a la maestra uno de estos pedazos, es decir $\frac{1}{24}$ de pizza. Pero, ¿cómo repartiría las otras dos pizzas?

Luego de pensar, Juan decide dividir ambas pizzas en 24 pedazos iguales, y para esto debe pasar a dividir los pedazos en que originalmente estaba dividida cada pizza. Toma la pizza que estaba partida en 4 pedazos y parte cada uno de esos pedazos en 6 partes iguales y así obtiene 24 pedazos iguales. Luego parte cada uno de los 8 pedazos de la otra pizza en 3 partes iguales y obtiene 24 pedazos iguales.



Ahora ya puede dividir las 3 pizzas entre las 24 personas que asistieron a la fiesta. Así cada persona recibirá $\frac{1}{24}$ de cada pizza, y como son 3 pizzas en total recibirá $\frac{1}{24} + \frac{1}{24} + \frac{1}{24} = \frac{3}{24}$.



Al hacer ésto, otro compañero le comenta que no hubiera tenido que partir todas las pizzas en 24 pedazos. Haciendo uso de la representación gráfica presentada en el segundo juego de figuras, le explica que de la segunda pizza de 8 pedazos, le hubiera podido dar un pedazo a cada niño, ya que $\frac{1}{8}$ es equivalente a $\frac{3}{24}$, como tampoco era necesario dividir cada uno de los pedazos de la primera pizza de 4 pedazos en 6 pedazos, conque hubiera dividido cada uno de estos 4 pedazos en 2 partes iguales, hubiera obtenido 8 pedazos de $\frac{1}{8}$ de pizza cada uno y la situación era la presentada anteriormente.

La maestra aprovecha esta experiencia y reflexiona sobre las diferentes interpretaciones que los alumnos dieron a la fracción, al repartir pizzas y trabajar en grupo:

a) Primero, tenían el problema de dividir 3 pizzas entre 24 personas, aquí la interpretación de la fracción es como una división.

b) Luego al dividir cada uno de los 4 pedazos de la primera pizza en 6 pedazos iguales, estaban haciendo uso de la equivalencia de fracciones: $\frac{1}{4} = \frac{1x6}{4x6} = \frac{6}{24}$.

Y al dividir cada uno de los 8 pedazos de la segunda pizza en 3 pedazos iguales tendrían:

$$\frac{1}{8} = \frac{1x3}{8x3} = \frac{3}{24}.$$

Al igual que con la tercera pizza, cada pedazo fue partido en 2 pedazos iguales:

$$\frac{1}{12} = \frac{1x2}{12x2} = \frac{2}{24}.$$

Al encontrar estas equivalencias, estaba implícita la representación de la fracción como parte de un todo, interpretación que sirve de base para darle sentido a la regla de buscar fracciones equivalentes.

ACTIVIDAD 3-2

Una maestra visita el Departamento de Matemática, en busca de orientación sobre una situación que se le ha presentado en el aula de clases. Sus alumnos de primer año, con frecuencia cometen el error que consiste en simplificar (en este caso por 3) en situaciones similares a ésta:

$$\frac{x + 3}{y + 3}$$

La maestra explica que ella les ha dado contraejemplos como el siguiente:

$\frac{1+2}{2+2}$ $\frac{1}{2}$ pero que los estudiantes lo olvidan con facilidad y cometen nuevamente el error. Además, ella cree que el error proviene del desconocimiento de los números fraccionarios.

Un profesor del Departamento le explica que un contraejemplo no convence a alguien, pues los estudiantes lo ven como una excepción y una excepción para ellos no hace falsa una regla. Esa es la lógica natural para los estudiantes y lo que se quiere es corregir el error de los alumnos, por lo que es necesario darles muchos contraejemplos. El profesor del Departamento le sugiere a la maestra tomar $\frac{1}{2}$ y compararlo con $\frac{1+n}{2+n}$ donde **n** tome los valores 1, 2, 3, 4, 5, 6,... La maestra encuentra una sucesión de fracciones, a saber: $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ y hace la observación de que todas son diferentes, menores que 1, que van creciendo y que a medida que n crece la sucesión se acerca a 1.

El profesor le pregunta a la maestra: ¿Cuál número es menor: $\frac{11}{12}$ o $\frac{7}{8}$? La maestra con rapidez contestó que $\frac{7}{8}$ es menor que $\frac{11}{12}$. Luego el profesor le sugiere que construya una sucesión similar a la anterior, pero partiendo de $\frac{3}{2}$. La maestra le señala que ahora se tiene la sucesión $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$, y que todos los elementos de la sucesión son diferentes, mayores que 1, que van decreciendo acercándose a 1.

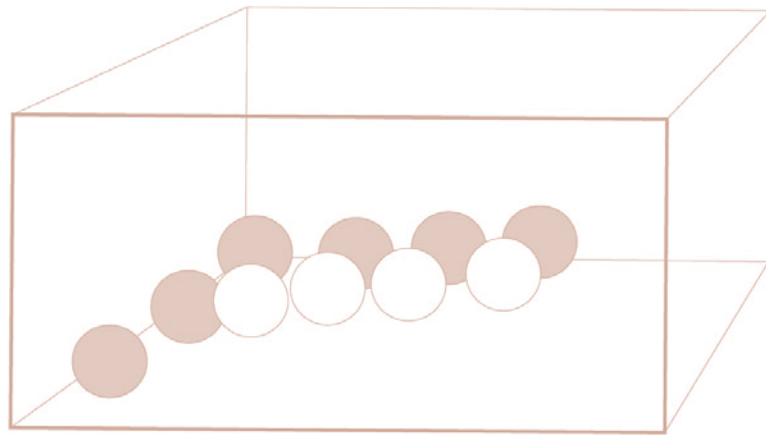
El profesor pregunta a la maestra, con el propósito de enfatizar en la situación: ¿Podrá alguna de las fracciones de la sucesión $\frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{4}{5}, \frac{5}{6}, \ldots$ ser igual a $\frac{1}{2}$? La Maestra concluye que como la sucesión contruida es creciente y se aproxima a 1, ninguna de las fracciones puede ser igual a $\frac{1}{2}$. Y agrega, que igual ocurre con la otra sucesión: $\frac{4}{3}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{6}, \ldots$, que es decreciente y se aproxima a 1; ninguna de las fracciones puede ser igual a $\frac{3}{2}$.

La maestra concluye que si se tiene una fracción, en este caso $\frac{1}{2}$ y $\frac{3}{2}$, y se le adiciona un mismo número al numerador y denominador de la fracción, ésta se altera. Por lo que no es posible simplificar por c la fracción $\frac{x+c}{y+c}$.

ACTIVIDAD 3-3

En la clase de Matemática, el profesor revisa las diferentes interpretaciones que los maestros pueden darles a las fracciones y para su sorpresa una maestra le señala que en las lecciones de probabilidad que habían aprendido, ella encuentra una nueva interpretación. La maestra explica que se trata de una comparación todo-todo entre el número de casos favorables y el total de casos.

La maestra ilustra la clase con la siguiente gráfica:



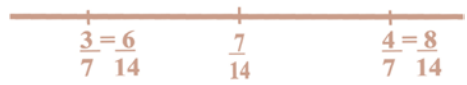
Si en la caja hay 6 bolas azules y 4 bolas blancas y se cierra de manera que no se vea el contenido: ¿Cuál es la probabilidad de sacar una bola azul? Como hay un total de 10 bolas, que es el total de casos y 6 bolas son azules, al extraer una bola hay 6 casos favorables para extraer una bola azul; en este caso, la probabilidad de sacar una bola azul es de 6 de 10, lo que se representa por $\frac{6}{10} = \frac{3}{5}$. La probabilidad de sacar una bola blanca será entonces de 4 de 10, que se representa por $\frac{4}{10} = \frac{2}{5}$, pues al extraer una bola hay 4 casos favorables de que sea blanca del total de 10. Agrega la maestra, que ha hecho uso de una interpretación de los números fraccionarios y que en esta interpretación siempre la probabilidad será un número fraccionario mayor o igual que 0 y menor o igual que 1 y el número de casos favorables es, a lo sumo, igual al número total de casos. El profesor de Matemática, ante la participación de la maestra, señala lo importante que es reflexionar sobre los hechos diarios y buscarles explicaciones, como es el caso de esta maestra, que ha encontrado una aplicación de los números fraccionarios y además ha descubierto que siempre la probabilidad será un número fraccionario mayor o igual que 0 y menor o igual que 1.

ACTIVIDAD 3-4

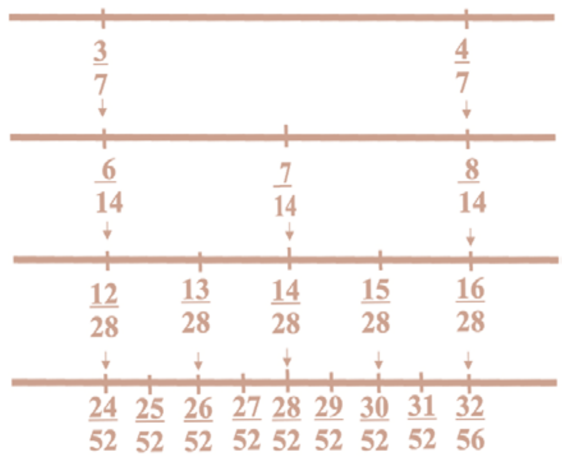
A Rosa María, alumna del curso de Matemática para maestros, le han planteado la siguiente interrogante: ¿Cuántos números fraccionarios hay entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$?

Rosa María, antes de dar una respuesta, representa gráficamente la situación:

Observa que con las fracciones con denominador 7, no hay ninguna fracción entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$. Pero si trabaja con fracciones equivalentes a $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$ como lo son $\frac{6}{14}$ y $\frac{8}{14}$ respectivamente, encuentra que la fracción $\frac{7}{14}$ está entre las fracciones dadas.



Continúa encontrando fracciones equivalentes a $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$ multiplicando por 2 ambos términos de la fracción y determina la fracción que está entre las sucesivas fracciones equivalentes, tal como lo muestra en el siguiente diagrama:



Rosa María concluye que como el proceso de multiplicar por 2 puede continuarse indefinidamente, le permite predecir que existen infinitas fracciones entre $\frac{3}{7}$ y $\frac{4}{7}$.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: RELACIONES ENTRE FRACCIONES Y DECIMALES

ACTIVIDAD 3-5

En el mural de un colegio está la lista de los mejores bateadores del equipo de béisbol del colegio con su respectivo promedio de bateo:

Mario Benítez	0,450
Roberto Arias	0,500
Adrián Morales	0,666...
Luis Campos	0,9090...

José lee la información del mural y no sabe interpretarla, porque él está acostumbrado a ver estos resultados expresados como razón. Por ejemplo: él sabe que la expresión 3 : 4 significa que un jugador bateó 3 hits por cada 4 veces que fue al bate. Así que decide transformar estas expresiones decimales a fracciones ordinarias y luego expresarlas como razón.

Mario Benítez tiene un promedio de 0,450, además $0{,}450 = \frac{450}{1000} = \frac{9}{20}$, que se representa como 9 : 20 y equivale a decir que Mario bateó 9 hits por cada 20 veces que fue al bate.

Roberto Arias tiene un promedio de 0,500, además $0{,}500 = \frac{500}{1000} = \frac{1}{2}$, que se representa como 1 : 2 y equivale a decir que Roberto bateó 1 hit por cada 2 veces que fue al bate.

Adrián Morales tiene un promedio de 0,666..., él sabe que los puntos suspensivos indican que se sigue repitiendo el número 6, pero no conoce el procedimiento para transformar estos decimales a fracción, por lo que le pregunta a su profesor de Matemática, quien le da la siguiente explicación.

Algunos números fraccionarios tienen una representación decimal finita, otros resultan ser decimales infinitos periódicos, esto es, cierto grupo de dígitos se repite una y otra vez en una sucesión indefinida. Las dos primeras expresiones decimales presentadas como promedio de bateo de los jugadores Benítez y Arias representan decimales finitos y ya se convirtieron correctamente en fracciones ordinarias, las dos últimas son decimales infinitos periódicos. La expresión 0,666... tiene de período la cifra 6 y también puede ser escrita como $0{,}\overline{6}$. El decimal infinito periódico 0,9090... tiene de período 90 y puede escribirse como $0{,}\overline{90}$. De igual manera, todo decimal periódico tiene como representación una fracción ordinaria.

Para convertir un número decimal periódico a fracción ordinaria, se designa la expresión decimal por un número; en el caso del promedio de Adrián Morales se designa por N:

$$N = 0{,}666...$$

Luego se multiplica esta expresión por aquella potencia de 10, cuyo exponente sea igual al número de dígitos del bloque periódico; en este caso se multiplica por 10:

$$10\,N = 6{,}666...$$

y se resta N de este producto, de tal manera que los períodos repetidos se correspondan y en la sustracción se elimine la fracción decimal.

$$\begin{array}{r} 10N = 6{,}666... \\ \underline{N = 0{,}666...} \\ 9N = 6 \end{array}$$

De modo que se despeja N y se obtiene $N = \frac{6}{9} = \frac{2}{3}$.

De donde el jugador Adrián Morales tiene promedio de $0{,}666... = \frac{2}{3}$, que se representa como 2 : 3 y equivale a decir que bateó 2 hits por cada 3 veces que fue al bate.

José, le agradece al profesor la explicación y procede a transformar el promedio de Luis Campos de la siguiente manera:

$$N = 0{,}9090...$$

Como el bloque periódico que se repite tiene dos dígitos, se multiplica por 100.

Luego:

$$\begin{array}{r} 100N = 90{,}9090... \\ -\quad N = \ \ 0{,}9090... \\ \hline 99N = 90 \end{array}$$

Despeja N y obtiene $N = \frac{90}{99} = \frac{10}{11}$

Por lo cual el promedio de Luis Campos lo representa como 10 : 11 que equivale a decir que bateó 10 hits, por cada 11 veces que fue al bate.

ACTIVIDAD 3-6

El profesor de matemática recuerda a sus estudiantes, que al inicio del bimestre estudiaron algunos sistemas de numeración entre los cuales están el sistema de numeración decimal y algunos sistemas de numeración de base distinta de diez, como el sistema binario. Sendos ejercicios para convertir números enteros de un sistema a otro fueron presentados.

Como una aplicación de la parte histórica, el profesor presenta a sus alumnos la siguiente actividad, que consiste en convertir fracciones ordinarias del sistema de numeración decimal al sistema de numeración sexagesimal.

El profesor señala que al escribir las fracciones, los babilonios utilizaban el "*Principio de Posición*" en la base sesenta, de la misma manera que utilizamos las fracciones ordinarias en la base diez. Una de las ambigüedades del sistema de numeración babilónico es que no existe el "*punto sexagesimal*"; se convino en utilizar el "*punto y coma*" para separar los símbolos que representan los enteros de los sexagesimales y las "*comas*" para separar los símbolos babilónicos de los enteros que están escritos con numerales indo- arábicos. Un ejemplo de la conversión del sistema decimal al sistema sexagesimal es el siguiente:

Sistema Decimal

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times 10}{10} = \frac{5}{10} = 0{,}5$$

Sistema Sexagesimal

$$\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times 60}{60} = \frac{30}{60} = 0;30$$

Algunas conversiones de las fracciones escritas en base diez y en base sesenta son las siguientes:

Sistema decimal	Sistema sexagesimal
$\frac{1}{3} = 0{,}333...$	$\frac{20}{60} = 0;20$
$\frac{1}{4} = 0{,}25$	$\frac{15}{60} = 0;15$
$\frac{2}{5} = 0{,}4$	$\frac{24}{60} = 0;24$
$\frac{1}{6} = 0{,}1666...$	$\frac{10}{60} = 0;10$

El profesor agrega que las conversiones antes realizadas son muy sencillas, porque los denominadores de las fracciones de base 10 son factores de 60. ¿Qué algoritmo se debe utilizar para convertir una fracción de base diez a una fracción de base sesenta, cuando el denominador de la fracción de base diez no es un factor de sesenta? El algoritmo es más elaborado en estos casos; veamos el siguiente ejemplo:
Exprese $\frac{1}{9}$ como una fracción sexagesimal.

En vista de que se desea convertir la fracción a la base 60, se amplifica la fracción por 60, en la que resulta:

$$\frac{1}{9} = \frac{60 \text{ x } \frac{1}{9}}{60} = \frac{6\ \frac{2}{3}}{60} = \frac{6}{60} + \frac{\frac{2}{3}}{60}$$

Como el segundo término del miembro de la derecha de la expresión anterior puede aún amplificarse por 60, entonces resulta:

$$\frac{\frac{2}{3}}{60} = \frac{60 \text{ x } \frac{2}{3}}{60^2} = \frac{40}{60^2} = 0;0,40 \text{ de donde}$$

$$\frac{1}{9} = \frac{60 \text{ x } \frac{1}{9}}{60} = \frac{6\ \frac{2}{3}}{60} = \frac{6}{60} + \frac{\frac{2}{3}}{60} = \frac{6}{60} + \frac{60 \text{ x } \frac{2}{3}}{60^2} = \frac{6}{60} + \frac{40}{60^2} = 0;6 + 0;0,40 = 0;6,40$$

De esta manera, el profesor motiva a los maestros a usar la historia de la Matemática en la enseñanza de esta disciplina.

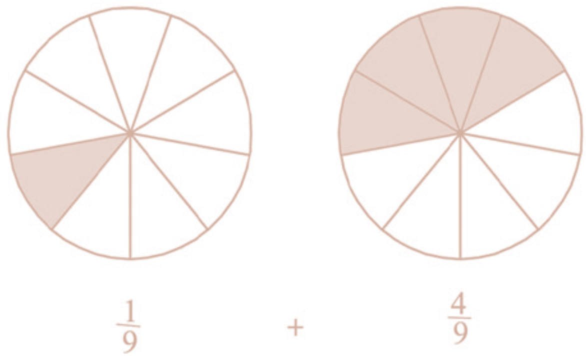
ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: OPERACIONES CON FRACCIONES.

ACTIVIDAD 3-7

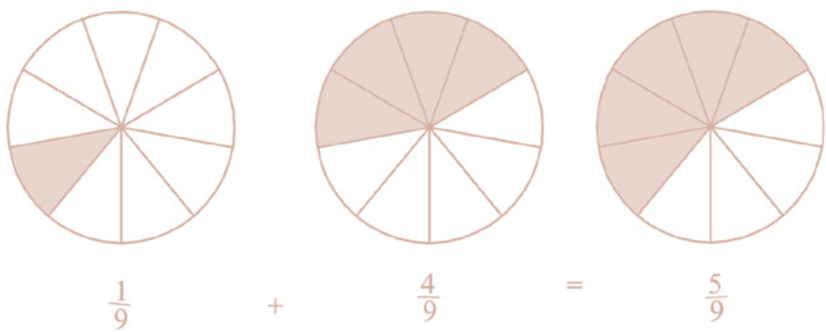
El maestro de V grado tiene programada una actividad para enseñar la suma y resta de fracciones. Prefirió utilizar la representación gráfica, porque si posteriormente los alumnos olvidan las reglas de cómo realizar la operación, podrían reconstruir el algoritmo mediante la representación. Antes de iniciar la actividad, el maestro recordó a los alumnos que las fracciones homogéneas son aquellas cuyos denominadores son iguales.
El maestro procedió en ese momento a realizar la siguiente actividad:

Hallar la suma de $\frac{1}{9} + \frac{4}{9}$.

El maestro traza un círculo en el tablero y con el apoyo de un transportador, lo divide en nueve partes iguales y sombrea una de esas partes, para representar $\frac{1}{9}$ y repite la misma operación para representar la fracción $\frac{4}{9}$.



La suma de las dos fracciones se obtiene uniendo las partes sombreadas de los dos sumandos.

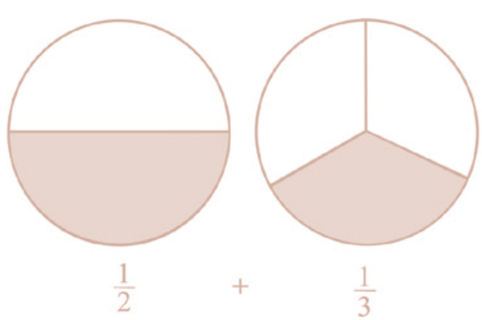


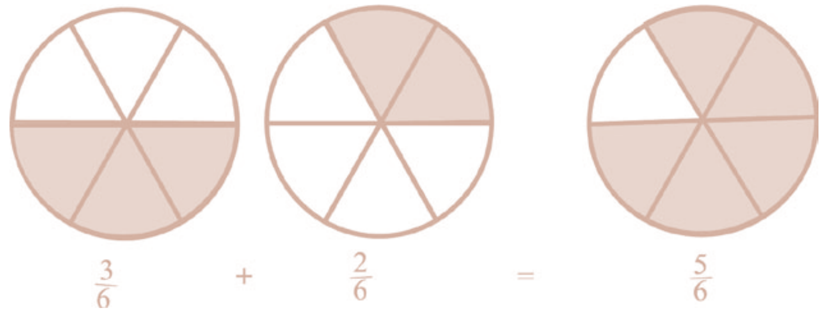
Después de realizar varios ejercicios, el maestro pasa a la segunda etapa, cuyo objetivo es hallar la suma de dos fracciones heterogéneas.

El momento es oportuno para recordar a los alumnos que dos fracciones se dicen heterogéneas, si sus denominadores son distintos. Un ejemplo son las fracciones $\frac{1}{2}$ y $\frac{1}{3}$.

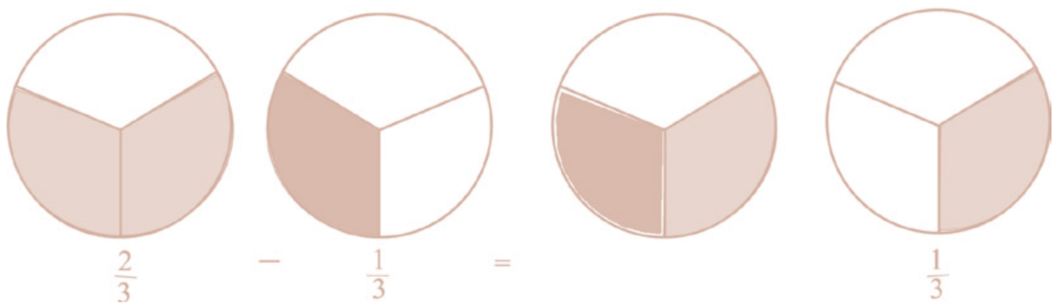
Utilizando el mismo método de la primera etapa, el maestro representa gráficamente la suma de $\frac{1}{2} + \frac{1}{3}$.

Para hallar la suma, se necesita que los dos sumandos se expresen como fracciones homogéneas; para lograrlo, recuerda que el mínimo común múltiplo de 2 y 3 es 6, luego:





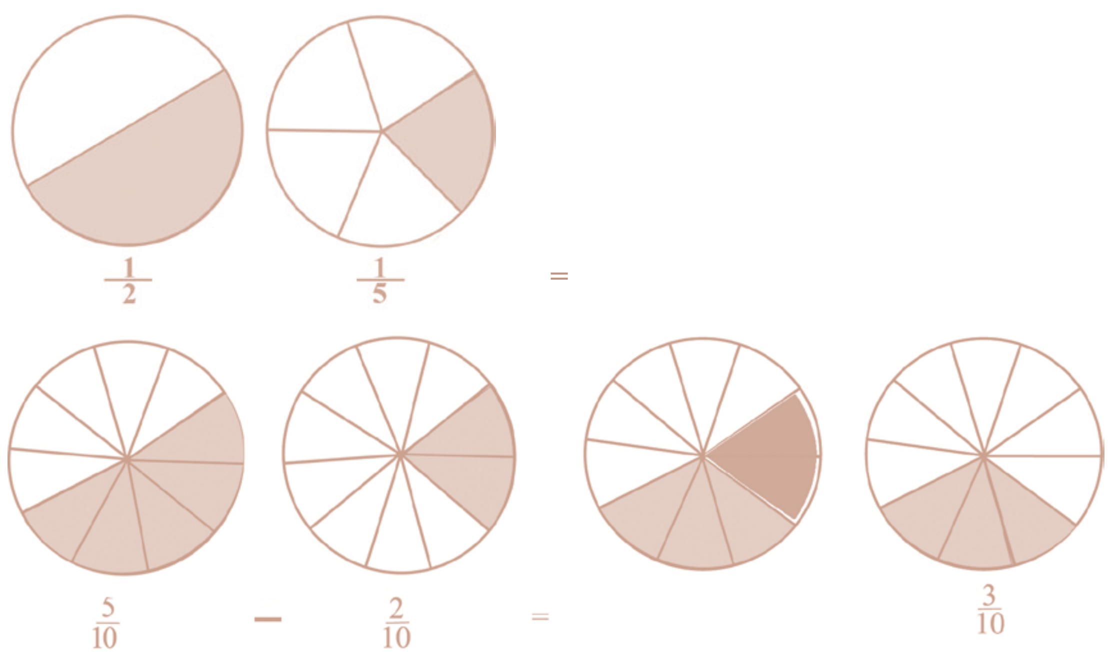
La resta se basa en el hecho de "quitar" la segunda fracción de la "primera"; en el caso de las fracciones homogéneas, el maestro formula el siguiente ejercicio: hallar $\frac{2}{3} - \frac{1}{3}$.



Cuando el maestro considera que sus alumnos tenían un dominio del tema, pasó a estudiar la resta con fracciones heterogéneas. El ejercicio que proporcionó a sus alumnos fue el siguiente:

Restar $\frac{1}{5}$ de $\frac{1}{2}$.

Uno de los alumnos hizo la siguiente representación:



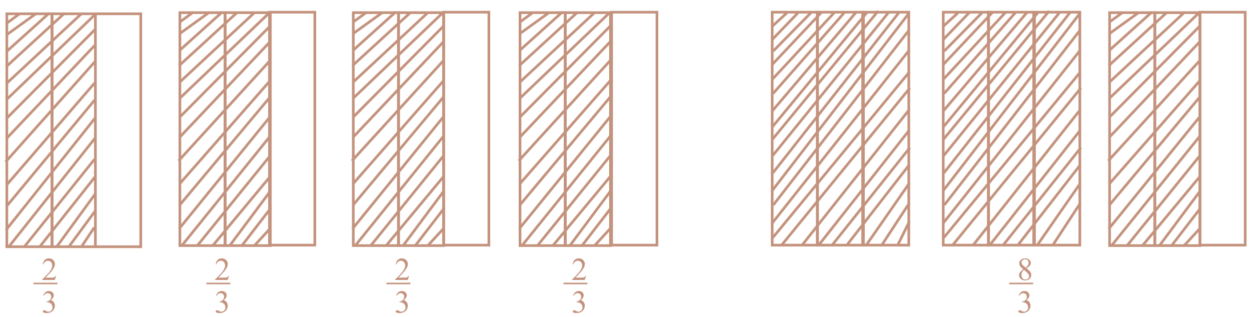
ACTIVIDAD 3-8

Una maestra en formación asiste a un seminario de Didáctica de la Matemática y plantea a los expertos una situación sobre la multiplicación de fracciones para que la ilustren. La maestra explica que ella aprendió en la escuela primaria que la multiplicación de dos números naturales a y b se interpreta como:

$$\underbrace{a + a + a + a + \dots\dots\dots + a}_{\text{b veces}} = a \times b,$$

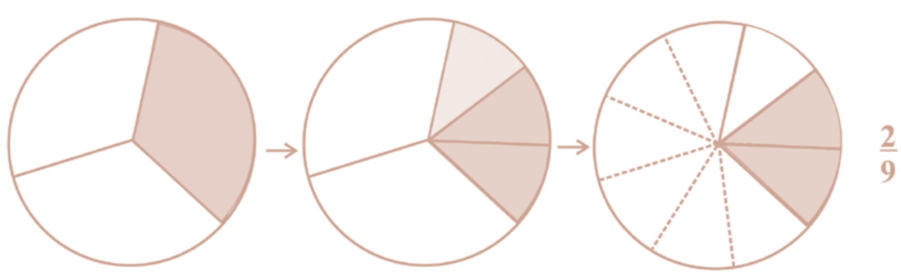
es decir, la multiplicación es "un número de veces"; luego, es necesariamente un número natural. La maestra pregunta: ¿Cómo se interpreta la multiplicación cuando se trata de números fraccionarios?

Los expertos en el seminario aprovechan la intervención de la maestra para ampliar al respecto y ofrecen los siguientes ejemplos:
Si se trata de multiplicar un número natural por un número fraccionario, como $4 \times \frac{2}{3}$, esto se puede interpretar como 4 de $\frac{2}{3}$ y se puede representar como en la gráfica:



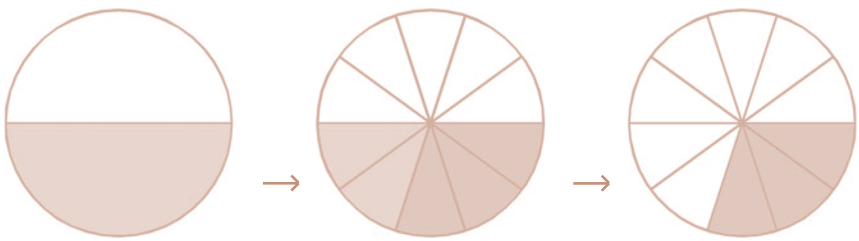
La maestra agradece la respuesta dada por los expertos, y agrega: "*Y si multiplico* $\frac{2}{3} \times \frac{1}{3}$ *¿cómo se representa?*"

Los expertos le responden que se trata igualmente de $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$ y lo ilustran con una gráfica como la siguiente:



Al analizar la representación gráfica, la maestra observa que $\frac{2}{3}$ x $\frac{1}{3}$ se interpreta como $\frac{2}{3}$ de $\frac{1}{3}$, o sea dos terceras partes de un tercio de la unidad. La unidad en este caso está representada por un círculo. El tercio se dividió en tres partes iguales, esto equivale a que las partes en que estaba originalmente dividida la unidad, queda multiplicada por tres, obteniendo así el denominador que representa las partes en que se ha dividido la unidad, o sea: 3 x 3 = 9. Se tenía un tercio y se toman 2 terceras partes de ese tercio, así que el numerador, que representa las partes que se toma de la unidad es: 1 x 2 = 2. De donde $\frac{2}{3} \text{ x } \frac{1}{3} = \frac{2 \text{ x } 1}{3 \text{ x } 3} = \frac{2}{9}$.

Los expertos le proponen a la maestra que encuentre $\frac{3}{5}$ x $\frac{1}{2}$, haciendo uso de una representación gráfica que ilustre la operación. La maestra interpreta $\frac{3}{5}$ x $\frac{1}{2}$ como $\frac{3}{5}$ de $\frac{1}{2}$ y lo representa en la gráfica:



Haciendo un análisis semejante al anterior encuentra que: $\frac{3}{5} \text{ x } \frac{1}{2} = \frac{3 \text{ x } 1}{5 \text{ x } 2} = \frac{3}{10}$.

Antes de finalizar el seminario, los expertos generalizan el algoritmo para multiplicar dos fracciones:

$$\frac{a}{b} \text{ x } \frac{c}{d} = \frac{a \text{ x } c}{b \text{ x } d}$$

La maestra termina diciendo que en el caso de 4 x $\frac{2}{3}$ aún se mantiene su idea de 4 veces el número, pero que en los casos de: $\frac{2}{3}$ x $\frac{1}{3}$ y $\frac{3}{5}$ x $\frac{1}{2}$, este modelo se rompe parcialmente, siendo ésta una razón por la cual ella atribuye ciertas dificultades de aprendizaje a la multiplicación de los números fraccionarios.

ACTIVIDAD 3-9

En el mes de septiembre, el maestro del VI grado A de una escuela celebra el día de la tierra, y los alumnos preparan un dulce típico de la región con plátanos, miel, canela, leche y jengibre. Una alumna lleva la receta de los ingredientes, para hacer un dulce, que rinde para 10 personas. Los ingredientes son los siguientes:

$5\frac{1}{2}$ plátanos verdes

$1\frac{1}{4}$ taza de miel

$2\frac{3}{4}$ cucharaditas de canela en polvo

$\frac{2}{3}$ taza de leche

$1\frac{1}{2}$ cucharadas de jengibre.

En el VI grado A hay 15 alumnos, y el maestro le solicita a los alumnos que calculen las cantidades de ingredientes que es necesario comprar.

Los alumnos se reúnen y resuelven el problema así: como hay 15 alumnos se necesitan $\frac{15}{10}$ veces los ingredientes, o sea $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ veces.

Por lo tanto, como $5\frac{1}{2} = \frac{11}{2}$ entonces $\frac{11}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{33}{4} = 8\frac{1}{4}$, luego se necesitan $8\frac{1}{4}$ plátanos verdes.

Además $1\frac{1}{4} = \frac{5}{4}$ de donde $\frac{5}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{15}{8} = 1\frac{7}{8}$, por lo que se necesitan $1\frac{7}{8}$ tazas de miel. Para calcular la cantidad de canela en polvo, basta observar que:

$2\frac{3}{4} = \frac{11}{4}$ así que: $\frac{11}{4} \times \frac{3}{2} = \frac{33}{8} = 4\frac{1}{8}$, por lo cual se debe comprar $4\frac{1}{8}$ cucharaditas de canela.

$\frac{2}{3} \times \frac{3}{2} = 1$, por lo tanto, se necesita 1 taza de leche.

Como $1\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$, entonces $\frac{3}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{9}{4} = 2\frac{1}{4}$, de modo que se debe comprar $2\frac{1}{4}$ cucharadas de jengibre.

Los alumnos del VI grado A, además de disfrutar de la actividad, mostraron gran dominio del uso de los números fraccionarios y de aprendizaje cooperativo.

ACTIVIDAD 3-10

La maestra de la escuela de una comunidad, con una población de 290 niños en edad escolar, preocupada porque todos los niños asistan a la escuela, realiza un censo con la ayuda de los padres de familia de la escuela donde labora. Ellos encontraron los datos que se muestran en la tabla siguiente:

Cantidad de niños	Intervalos de edad en años	Niños que no asisten a la escuela
150	6-8	1 de cada 25
80	8-10	1 de cada 10
60	10-12	1 de cada 5

La maestra utiliza la actividad realizada en la comunidad para ilustrar a los alumnos de su escuela sobre la realidad y reflexionar con ellos sobre las posibles causas de la situación dada y sobre todo, aprovechar el ambiente motivador para que los alumnos refuercen los conocimientos adquiridos sobre los números fraccionarios. Así ella solicita a los alumnos que determinen el total de niños, en cada intervalo, que no asisten a la escuela en la comunidad.

Los niños trabajan en grupos, discuten entre ellos y presentan a la maestra sus resultados que son los siguientes:

Si 1 niño de cada 25, lo que se representa por $\frac{1}{25}$ de la población entre 6 y 8 años no va a la escuela, entonces se tiene que $\frac{1}{25}$ x 150 = 6, por lo tanto, 6 niños entre 6 y 8 años no van a la escuela.

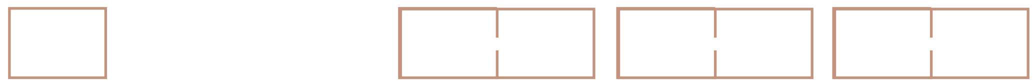
De igual manera: $\frac{1}{10}$ x 80 = 8, por lo que 8 niños entre 8 y 10 años no van a la escuela.

Además: $\frac{1}{5}$ x 60 = 12 de donde, 12 niños entre 10 y 12 años no van a la escuela.

La maestra, una vez finalizada la presentación de los niños, los invita a reflexionar sobre las siguientes interrogantes: ¿Cuál es el intervalo de edad de mayor deserción escolar en la comunidad? y ¿Cuáles creen que podría ser, según ustedes, las posibles causas?

ACTIVIDAD 3-11

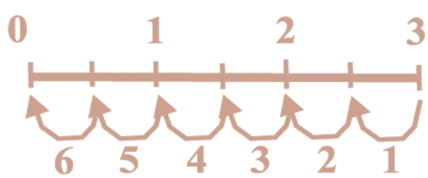
Una de las reglas que, por lo general, aplican los estudiantes sin comprender, es la de la división de fracciones: ¿Por qué se invierte el divisor y se multiplica? Un maestro le pregunta a su profesor de Matemática: ¿Cómo representar la división entre fracciones, para lograr una mejor comprensión de la regla?
Mediante el ejemplo de la división de $3 \div \frac{1}{2}$, el profesor intenta dar respuesta a las inquietudes del maestro. Le propone leer $3 \div \frac{1}{2}$ como ¿Cuántos medios hay en 3 unidades? o ¿Cuántas veces cabe
$\frac{1}{2}$ en 3?
De acuerdo con la interpretación de la fracción como parte de un todo si se tiene media unidad y 3 unidades:



$\frac{1}{2}$ unidad 3 unidades

se observa que media unidad cabe 6 veces en 3 unidades.

Si se toma la interpretación de la fracción como medida y se ilustra la división como una sustracción reiterada, se tiene que al comenzar a restar $\frac{1}{2}$ a partir de 3, se obtiene que $\frac{1}{2}$ cabe 6 veces en 3, como se muestra a continuación:



1. $3 - \frac{1}{2} = 2\ \frac{1}{2}$
2. $2\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 2$
3. $2 - \frac{1}{2} = 1\ \frac{1}{2}$
4. $1\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 1$
5. $1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$
6. $\frac{1}{2} - \frac{1}{2} = 0.$

Otra explicación que da el profesor al maestro sobre la división de fracciones, en particular sobre la multiplicación del numerador por el recíproco del divisor, está basada en que todo número, excepto el 0, tiene un recíproco, además de conocer que si se multiplican ambos términos de una fracción por un mismo número natural, distinto de cero, se obtiene otra fracción equivalente a la primera:

$$\frac{3}{\frac{1}{2}} = \frac{3 \times \frac{2}{1}}{\frac{1}{2} \times \frac{2}{1}} = \frac{6}{1} = 6.$$

El profesor presenta otro ejemplo de división de fracciones:

$$\frac{\;}{\frac{3}{4}} = \frac{\times \frac{4}{3}}{\frac{3}{4} \times \frac{4}{3}} = \frac{\times \frac{4}{3}}{\;} = \times \frac{4}{3}.$$

Y luego generaliza lo expuesto en los ejemplos anteriores y tiene:

$$\frac{\ }{\frac{c}{d}} = \frac{\times \frac{d}{c}}{\frac{c}{d} \times \frac{d}{c}} = \frac{\times \frac{d}{c}}{\ } = \times \frac{d}{c}.$$

obteniendo así la regla: **Para dividir dos fracciones se multiplica el numerador por el recíproco del denominador.**

ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

I Escoge la respuesta correcta para cada uno de los enunciados siguientes:

1. Si $\frac{a}{b}$ de la piscina de la casa de María está llena, al duplicar los valores de a y b, la piscina estará:
   a. el doble de llena
   b. igual de llena
   c. la mitad de llena.

2 Se conoce el total de alumnos de una clase, y además se sabe que $\frac{4}{7}$ son niñas, al calcular el número de niñas que hay en el salón se tiene que:
   a. más de la mitad son niñas
   b. los niños son más que las niñas
   c. no se puede conocer el total de niños y niñas.

3 Una carrera de relevo se corre por tramos de $\frac{1}{10}$ km cada corredor. Al recorrer $\frac{3}{5}$ km, habrán participado:
   a. 10 corredores
   b. 6 corredores
   c. 5 corredores.

4. Un agricultor sembró el lunes dos tercios de la finca y el martes sembró la mitad de lo que le faltaba por sembrar. Entonces el martes sembró:
   a. $\frac{1}{2}$ de la finca
   b. $\frac{1}{3}$ de la finca
   c. $\frac{1}{6}$ de la finca.

5 Cuando el reloj marca las 6 de la tarde, la fracción del día transcurrida es:

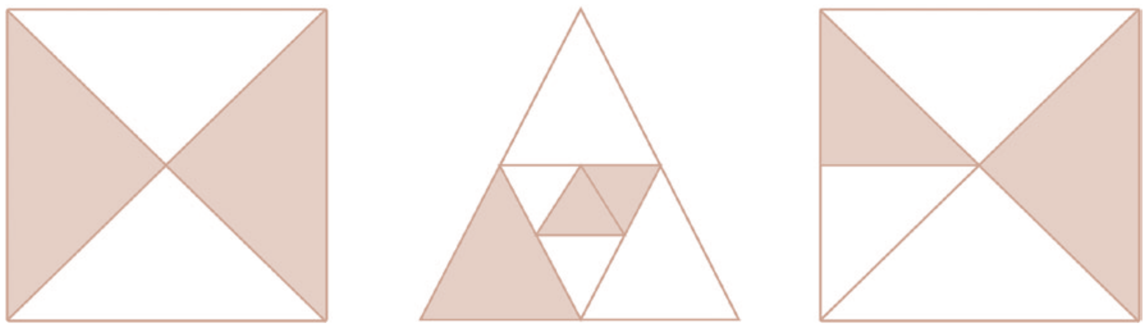
a. $\frac{3}{4}$ del día

b. $\frac{2}{3}$ del día

c. $\frac{1}{2}$ del día.

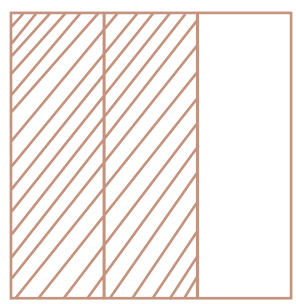
II Resuelva los siguientes problemas:

1. Dadas las siguientes figuras, en las que a y c son cuadrados y b un triángulo equilátero, escriba la fracción que representa la parte sombreada:



a **b** **c**

2. Represente una fracción equivalente a la fracción que representa el área sombreada de la figura, mostrada a continuación, pero con denominador 15:



3. En una caja hay 100 bolas de las cuales $\frac{1}{4}$ del total son rojas, $\frac{2}{5}$ son verdes y el resto son amarillas. Si se extrae una bola de la caja ¿cuál tiene mayor probabilidad de salir?, ¿cuál tiene menor probabilidad de ser extraída?

4. ¿De cuántas maneras diferentes se puede partir un cuadrado cuyo lado mide 24 cm en 24 partes iguales?

5. Los egipcios, sólo utilizaban las fracciones unitarias, a excepción de la fracción $\frac{2}{3}$. ¿Cómo se expresan las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$ y $\frac{1}{6}$, como la suma de dos fracciones unitarias distintas?

6. ¿Cuál es la expresión numérica correspondiente a $\frac{1}{7}$ en el sistema sexagesimal?

SUGERENCIAS DE SOLUCIÓN

I. Las alternativas correctas son:

1. b) igual de llena, ya que al duplicar los valores de ambos términos de la fracción se encuentra una fracción equivalente a la dada.

2. a) más de la mitad son niñas, ya que $\frac{4}{7} > \frac{1}{2}$

3. b) al recorrer $\frac{3}{5}$ km habrán participado 6 corredores. Cada corredor corre

$\frac{1}{10}$ km = $\frac{1}{10}$ x 1000 m = 100 m; $\frac{3}{5}$km equivale a $\frac{3}{5}$ x 1000m = 600m, luego es necesario que participen 6 corredores, pues cada uno correrá 100 m.

4. c) Sembró la mitad de un tercio de la finca, que fue lo que le quedó por sembrar. Es decir: $\frac{1}{2}$ x $\frac{1}{3}$ de la finca es igual a $\frac{1}{6}$ de la finca.

5. a) Cuando el reloj marca las 6 de la tarde ha transcurrido 18 horas del día y como el día tiene 24 horas, han transcurrido $\frac{18}{24}$ de día, o sea $\frac{3}{4}$ de día.

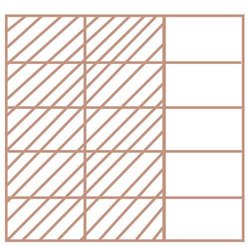
II Sugerencias para la solución de los problemas

1. a) La parte sombreada representa $\frac{1}{2}$

   b) La parte sombreada representa $\frac{1}{4} + \frac{2}{4} \text{ x } \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

   c) La parte sombreada representa $\frac{1}{4} + \frac{1}{2} \text{ x } \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$

2.

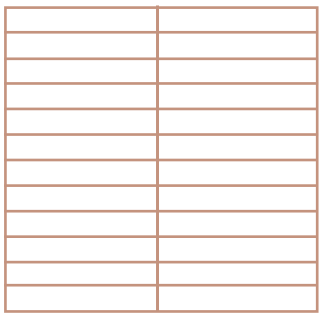


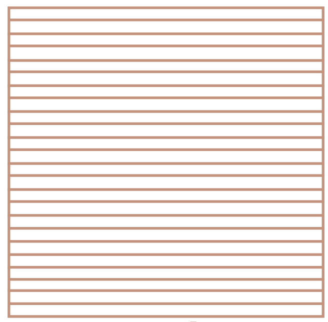
$\frac{10}{15}$

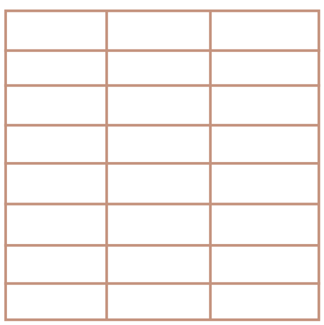
3. Como $\frac{1}{4}$ x 100 = 25, entonces en la caja hay 25 bolas rojas. Además:

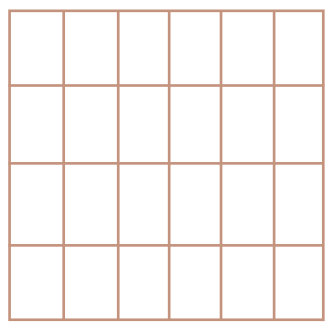
$\frac{2}{5}$ x 100 = 40, de donde hay en la caja 40 bolas verdes. Como en la caja hay 100 bolas entonces, el resto de las bolas, que son 35, son amarillas. La probabilidad de extraer una bola roja es de 25 de 100, es decir $\frac{1}{4}$. La probabilidad de obtener una bola verde es de 40 de 100, es decir $\frac{2}{5}$ y la probabilidad de obtener una bola amarilla es de $\frac{35}{100} = \frac{7}{20}$. Por lo tanto, la bola verde tiene mayor probabilidad de salir porque $\frac{40}{100} > \frac{35}{100} > \frac{25}{100}$. Además la bola roja tiene menos probabilidad de salir que las otras.

4. El número 24 tiene como divisores los números 1, 2, 3, 4, 6, 8, 12 y 24, luego:
a) 24 = 12 x 2
b) 24 = 24 x 1
c) 24 = 8 x 3
d) 24 = 4 x 6
De donde un cuadrado cuyo lado mide 24 cm se puede dividir en 24 partes iguales de 4 maneras diferentes. Como se observa en las figuras, cada una de las partes representa $\frac{1}{24}$ del cuadrado.


a


b


c


d

5. Las fracciones $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, y $\frac{1}{6}$ se expresan como la suma de dos fracciones unitarias de la siguiente manera:

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}$$

$$\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{4} = \frac{1}{6} + \frac{1}{12}$$

$$\frac{1}{6} = \frac{1}{9} + \frac{1}{18}$$

6. Como 60 no es múltiplo de 7, entonces el algoritmo es similar al desarrollado en la ACTIVIDAD 3-6; lo invitamos a justificar la solución del ejercicio.

$$\frac{1}{7} = \frac{60 \text{ x } \frac{1}{7}}{60} = \frac{8 + \frac{4}{7}}{60} = \frac{8}{60} + \frac{\frac{4}{7}}{60} = \frac{8}{60} + \frac{60 \text{ x } \frac{4}{7}}{60^2} = \frac{8}{60} + \frac{34 + \frac{2}{7}}{60^2}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{60 \text{ x } \frac{2}{7}}{60^3} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17 + \frac{1}{7}}{60^3}$$

$$\frac{1}{7} = \frac{8}{60} + \frac{34}{60^2} + \frac{17}{60^3} + \frac{\frac{1}{7}}{60^3}$$

Si continuamos, la última fracción puede convertirse de la siguiente manera:

$$\frac{\frac{1}{7}}{60^3} = \frac{60 \text{ x } \frac{1}{7}}{60^4} = \frac{\frac{60}{7}}{60^4} = \frac{8}{60^4} + \frac{\frac{4}{7}}{60^4}$$

lo cual conduce a la misma sucesión de números: 8, 34, 17 por lo tanto concluimos que:
$\frac{1}{7} = 0;\, 8,34,17,8,34,17,\ldots \;=\; 0;\, \overline{8,34,17}$.

CAPÍTULO IV
RAZONES Y PROPORCIONES

RESEÑA HISTÓRICA

Grecia, en la primera mitad del siglo VI a.C., se caracteriza por el desarrollo de la Geometría Deductiva de Tales de Mileto, quien es considerado el padre de la Matemática griega de esa época. Más tarde, durante la segunda mitad de ese mismo siglo, en los alrededores del año 540 a.C., el trabajo de Tales de Mileto fue seguido por Pitágoras de Samos, para quien el concepto de número llegó a ser el principio crucial de toda proporción, orden y armonía del universo.

Hacia el año 320 a.C., Eudemo de Rodas, eminente alumno de Aristóteles, escribe quizás el primer libro de Historia de la Matemática, el cual se ha perdido. Aunque todo parece indicar que Proclo, un filósofo neoplatónico, tuvo acceso a parte de la obra, lo que le permitió afirmar, citando como referencia el libro de Eudemo, que el origen de las proporciones se atribuye a los pitagóricos y a su maestro Pitágoras.

Los griegos formularon la definición de proporción de la siguiente manera: "Los números son proporcionales si el primero es el mismo múltiplo, o la misma parte, o las mismas del segundo que el tercero del cuarto". (Collette,1986, p.77).

Al examinar la definición anterior, se observa que ésta es una clara muestra de la concepción discreta que tenían los griegos sobre el concepto de número. Esta definición fue aplicada a magnitudes geométricas, tales como: longitudes, áreas y volúmenes. Bajo el marco de esa interpretación, los pitagóricos entendían que dos segmentos son conmensurables si ellos son múltiplos de una sola unidad común. La misma definición, identificada con el número 20 del Libro VII de Elementos de Euclides, es sintetizada como la igualdad de dos razones.

Hacia el año 340 a.C. Hipaso de Metaponto le da un golpe mortal a la filosofía de los pitagóricos al descubrir las magnitudes inconmensurables, pues el descubrimiento produjo una crisis en el seno de la geometría griega y, por ende, a su Teoría de Proporciones que se basa en la comparación de razones de magnitudes geométricas e invalidó las demostraciones geométricas que utilizaban conceptos proporcionales.

La crisis en los fundamentos de la Geometría griega fue resuelta por Eudoxio de Cnido, un estudiante de la Academia de Platón en Atenas y sobre todo un investigador incesante, con un alto grado de independencia y audacia en el pensamiento creador. El surgimiento del Método Deductivo, con su paradigma los Elementos de Euclides, y el descubrimiento de las magnitudes inconmensurables, están ligados a la primera revolución científica en la naturaleza de la Matemática, según la definición de revolución científica dada por T. Kuhn.

La clave del trabajo de Eudoxio fue la formulación de la definición de proporcionalidad que se enuncia de la siguiente manera:

> *Sean a y b magnitudes geométricas del mismo tipo (ambas son longitudes, o áreas o volúmenes).Sean c y d un segundo par de magnitudes geométricas, ambas del mismo tipo pero no necesariamente del mismo tipo del primer par. Eudoxio define la proporcionalidad* a:b = c:d *si dados dos números m y n enteros y positivos se tiene que o bien:*
> na > mb y nc > md, o
> na = mb y nc = md, o
> na < mb y nc < md (Edwards, 1979, p.13).

La palabra razón, que expresamos hoy por el símbolo **a : b** proviene del latín "*reri*"que significa pensar, estimar. Durante la Edad Media, los libros de Aritmética le dieron el significado de "*computar*". Algunos escritores del latín medieval usaban el término "*proportio*" en lugar de razón, mientras que la igualdad de dos razones **a : b = c : d** era denominado "*proporcionalitis*".

En la razón **a : b** el número **a** recibe el nombre de antecedente y el número **b** el de consecuente. Estos términos "*antecedente*", y "*consecuente*" , fueron introducidos al hacer las traducciones latinas de las obras de Euclides. Es importante señalar que se han realizado intentos para cambiar estos nombres, pero no se ha logrado.

Las razones y proporciones constituyen uno de los temas fundamentales de la enseñanza, desde el nivel primario y, sobre todo, enlaza las distintas áreas de las Ciencias Naturales, Exactas y Sociales.

ALGUNOS RESULTADOS DE INVESTIGACIONES

Uno de los estudiosos que se ocupó de las proporciones fue J. Piaget. Desde 1946 se dedicó al estudio del movimiento, en donde interviene la proporcionalidad cuando se compara distintos espacios recorridos y los tiempos empleados en recorrer dichos espacios. También estudió la idea de probabilidad, cuando le atribuye el mismo valor a un caso favorable sobre tres posibles que a dos casos favorables sobre seis posibles. Señalan Fiol & Fortuny (1990) que Piaget y otros, en 1968, se centraron en el estudio de la función lineal, considerada hoy día como la matematización de las nociones cotidianas y utilitarias de proporcionalidad.

La noción de proporcionalidad presenta en la enseñanza dos aspectos aparentemente contradictorios, pues parece un concepto sencillo y, sin embargo, es una noción difícil en las aplicaciones. En la educación primaria aparece en la Aritmética con las tablas de multiplicar por ejemplo, sin embargo, en la Geometría aparece en la educación secundaria. Cuando se introducen las proporciones en la enseñanza, se enfatiza en los algoritmos como la propiedad fundamental o el uso de la regla de tres, pero los estudiantes no comprenden de donde provienen estos algoritmos.

El concepto de proporcionalidad inversa se adquiere después de los catorce años, de acuerdo con algunas investigaciones, según lo sostienen Fiol & Fortuny (1990). Otros resultados de investigación sustentan que, tal vez, el concepto de proporcionalidad inversa nunca llegue a ser alcanzado, (Orton, 1990). Piaget y sus colaboradores (Fiol & Fortuny,1990) situaron la edad de los once a los catorce años como la edad correcta para la utilización de estrategias de proporcionalidad.

La aplicación de los conceptos de razón y proporción es fundamental para resolver una serie de problemas como son los relativos al cálculo de porcentajes, medición por medio de escalas, representaciones de gráficas circulares, resultados geométricos basados en la semejanza de figuras, además del cálculo de densidad, velocidad, aceleración, entre muchas otras leyes físicas y químicas. Pero a pesar de la importancia y aplicabilidad de los conceptos de razón y proporción, a los alumnos les cuesta entender el empleo de estos conceptos.

El método de reducción a la unidad para resolver problemas como el siguiente: ¿si cinco lápices cuestan B/1.00, cuánto cuestan 12 lápices?, que consiste en encontrar primero el precio de un lápiz para luego multiplicar este precio por el número de lápices que se compran, plantea problemas a los estudiantes. Aunque para algunos el método resulta adecuado, ya que no pueden manejar el método directo que implica plantear una proporción y dejar los cálculos hasta el final, el distinguir entre proporción directa e inversa, por medio del método de reducción a la unidad, resulta más complicado.

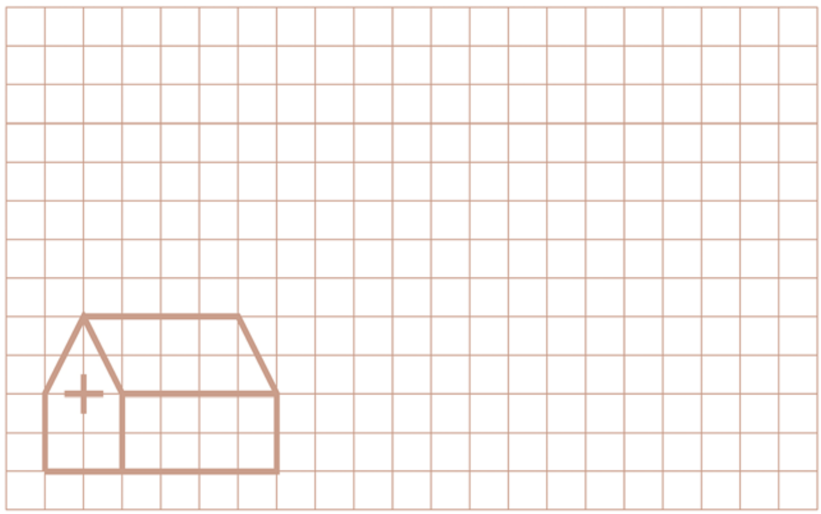
La utilización de videos, transparencias y programas informáticos, permite una mejor visualización de la proporcionalidad entre las formas, sobre todo en el espacio, y su empleo en el aula de clases, de ser posible, es un recurso metodológico importante para el tratamiento del tema de proporcionalidad. Es fundamental para la comprensión de las proporciones una enseñanza dinámica basada en uso de problema en contextos, utilización de material concreto, el trazado de tablas de valores de las magnitudes y el de las gráficas. Alarcón et al.(1995) en uno de sus señalamientos invitan a una profunda reflexión sobre el papel del maestro frente a la enseñanza de la proporcionalidad:

> *La proporcionalidad no debe ser vista como un tema más del programa, sino como el acceso a una forma de razonamiento que se logra gradualmente a lo largo de toda la enseñanza, a través de actividades adaptadas al grado de madurez de los alumnos (p.117).*

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: INTERPRETACIÓN Y CONCEPTO DE RAZON Y PROPORCIÓN

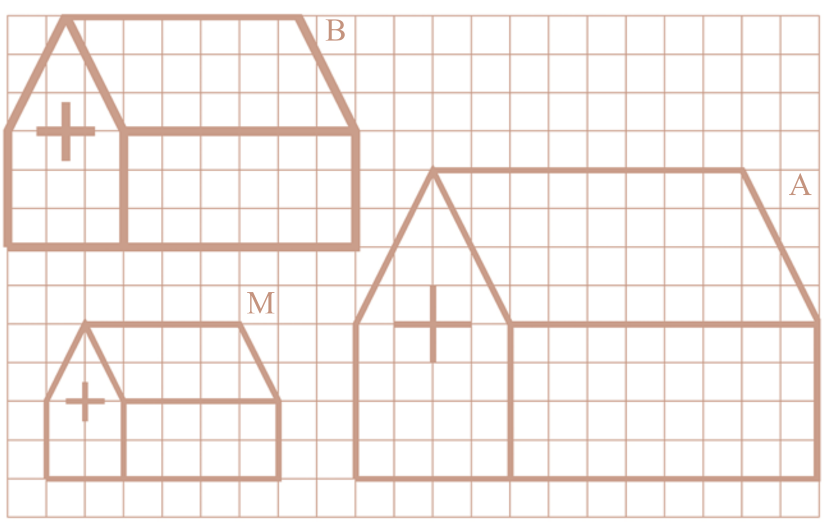
ACTIVIDAD 4-1

Antes de formalizar un concepto, la maestra Laura desea conocer las ideas previas que tienen sus estudiantes en relación con el concepto que van a aprender. Para esto les presenta un dibujo en una hoja cuadriculada como el que se muestra a continuación:



Uno de los estudiantes le pide que amplíe el dibujo porque desde su puesto no puede verlo. La maestra solicita que hagan la ampliación de la figura en una hoja cuadriculada que entrega a cada grupo de 5 estudiantes.

Luego que los estudiantes trabajan en grupo, le presentan a la maestra sus respectivas ampliaciones, entre las que se encuentran las dos siguientes:



La figura M es el modelo que entregó la maestra en la hoja cuadriculada. Las figuras A y B son dos ampliaciones del modelo. La maestra Laura, le solicita a los integrantes de cada grupo que le comenten cómo hicieron la ampliación.

Uno de los integrantes del grupo que hizo la ampliación de la figura A le dice que tomó como unidad de medida el lado de un cuadrito y que contó las unidades que habían en cada lado horizontal y vertical del modelo. Luego, por cada unidad del modelo trazó 2 unidades, obteniendo así la figura A.

El grupo que dibujó la figura B le explicó a la maestra que por cada 2 unidades que contó en el modelo, trazó 3 unidades en el dibujo de la figura B.

La maestra aprovecha las explicaciones dadas por los estudiantes para formalizar el concepto de razón y plantea a sus estudiantes que la razón entre las dimensiones de la figura A a las del modelo es de dos a uno y que se representa como: $\frac{2}{1}$ ó 2 : 1; y la razón entre las dimensiones de la figura B a las del modelo es de tres a dos, que se representa como $\frac{3}{2}$ ó 3 : 2.

Se llama razón entre dos cantidades a y b (con b $\neq$ 0), a la relación $\frac{a}{b}$.

ACTIVIDAD 4-2

La escuela de un barrio, tiene una matrícula baja, la Directora expone en el mural los datos sobre edad, peso, altura y procedencia de los 10 nuevos alumnos que han ingresado a la escuela. El profesor de Matemática de los maestros en formación de un Instituto aledaño, siempre interesado en la enseñanza de problemas reales para sus alumnos, solicita a éstos, que visiten la escuela y recojan la información sobre la altura y el peso de los nuevos alumnos. Les solicita que hagan un trabajo en grupo, que consistirá en estudiar la relación entre las dos magnitudes involucradas. Los maestros se organizan, visitan la escuela, recogen la información y uno de los grupos presenta el cuadro siguiente:

Alumno	Peso P en kilogramos	Altura H en metros
1	10,35	0,85
2	10,84	0,90
3	10,92	0,91
4	11,11	0,92
5	11,35	0,95
6	13,90	1,15
7	14,88	1,24
8	15,40	1,27
9	16,13	1,32
10	18,12	1,49

Los datos del peso están ordenados, de menor a mayor, como se observa en la tabla.

Al comparar las dos magnitudes involucradas, a saber, peso P y altura H, mediante la razón $\frac{P}{H}$, se encuentra en cada caso los siguientes datos:

Alumno	$\frac{P}{H}$
1	12,18
2	12,04
3	11,86
4	12,08
5	11,95
6	12,09
7	11,98
8	12,12
9	12,22
10	12,14

Se concluye, que a aunque los niños tienen diferentes alturas y diferentes pesos, se mantiene aproximadamente una constante de proporcionalidad al comparar las dos magnitudes, el peso P y la altura H, que en este caso es alrededor de 12. Es decir, los niños que han ingresado a la escuela guardan una proporcionalidad entre su peso P y su altura H.

Para concluir el profesor solicita a los maestros que tracen una gráfica del peso en función de la altura y observen cómo se manifiesta la constante de proporcionalidad en la gráfica.

ACTIVIDAD 4-3

La maestra de VI grado de una escuela primaria de la Ciudad de Panamá, Panamá, quiere que sus alumnos utilicen la representación gráfica, por medio de una recta que pasa por el origen, como criterio de proporcionalidad entre dos magnitudes. Solicita a uno de los alumnos del salón que vaya a una agencia de autobuses y pregunte por el precio del pasaje de la Ciudad de Panamá a la Ciudad de San José, Costa Rica.

El alumno trae la siguiente información: El pasaje cuesta 50.00 dólares y ofrecen un descuento del 10% por la compra de 6 o más pasajes; pero por cada 10 pasajes que se compren dan un descuento del 20% del total.

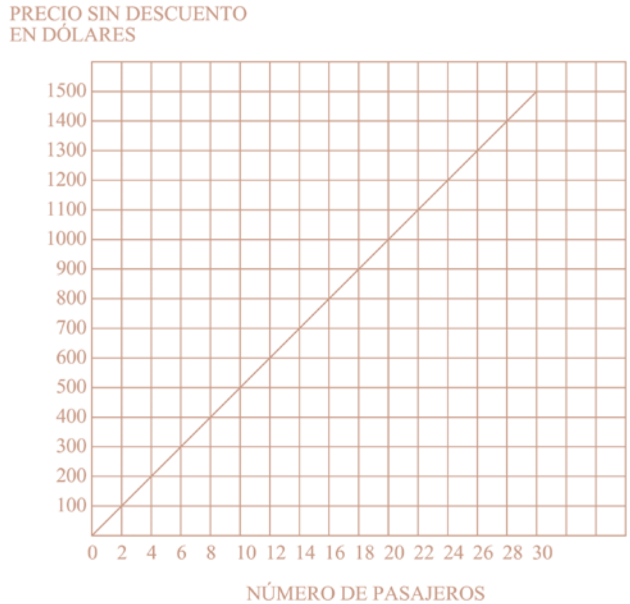
La maestra solicita a otro estudiante que haga una tabla con la información que se trajo, donde en una columna coloque la cantidad de pasajes, hasta un total de 30, en otra columna el precio que se pagaría sin descuento, y en una tercera columna el precio con el descuento otorgado.

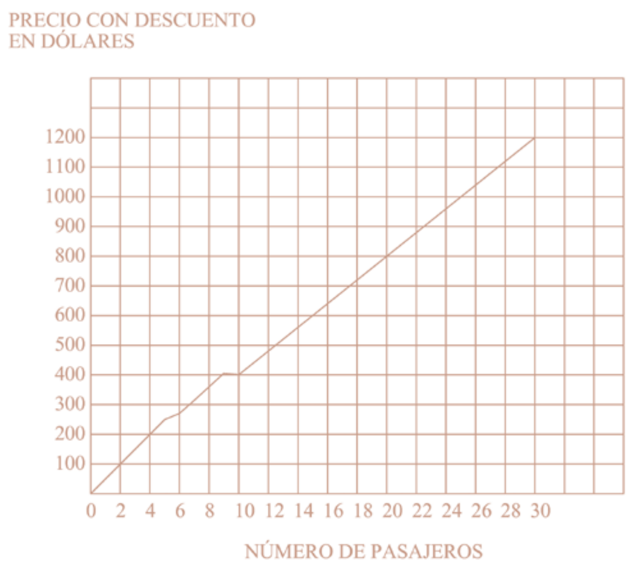
El estudiante confecciona la siguiente tabla:

Cantidad de pasajes	Precio sin descuento (en dólares)	Precio con descuento (en dólares)
1	50	50
2	100	100
3	150	150
4	200	200
5	250	250
6	300	300 - 30 = 270
7	350	350 - 35 = 315
8	400	400 - 40 = 360
9	450	450 - 45 = 405
10	500	500 - 100 = 400
20	1000	1000 - 200 = 800
30	1500	1500 - 300 = 1200

Luego, la maestra le pregunta al grupo de estudiantes: ¿Existe proporcionalidad entre la cantidad de pasajes que se compre y el precio que se pagaría sin descuento? y ¿entre la cantidad de pasajes que se compre y el precio que se pagará con el descuento?

Para responder a estas preguntas, un grupo de estudiantes hace la gráfica del número de pasajes con relación al precio pagado sin descuento y otro grupo traza la gráfica del número de pasajes en relación con el precio por pagar con el descuento.

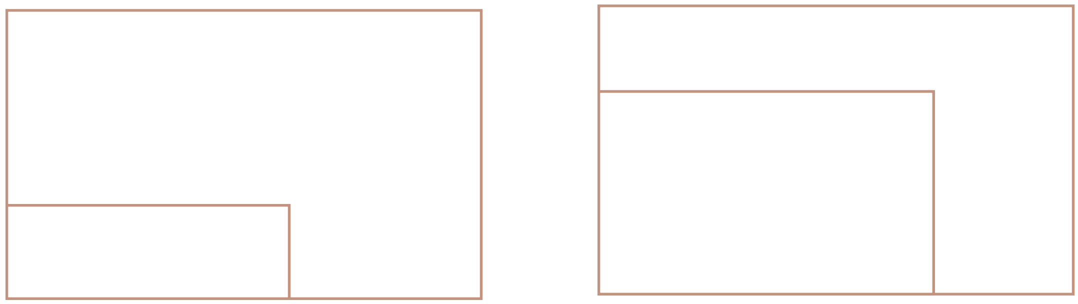




Al analizar las dos gráficas, los estudiantes llegan a la conclusión de que por ser la primera de las gráficas una recta que pasa por el origen, existe proporcionalidad entre el número de pasajes y el precio que se pagará sin descuento, mientras que por no ser la gráfica con descuentos una recta no hay proporcionalidad entre el número de pasajes y el precio por pagar con descuento.

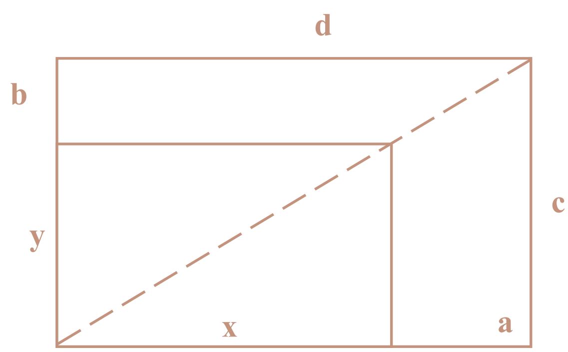
ACTIVIDAD 4-4

Con el propósito de que los maestros construyan el concepto de proporcionalidad, el profesor de Matemática lleva al aula de clases cuatro rectángulos en cartulina, los cuales superpone como se muestra en la figura.



El profesor, invita a los maestros para que realicen una actividad, en grupos de cinco maestros, que consiste en identificar en cuál de las parejas de rectángulos las medidas de los lados guardan una relación de proporcionalidad y les solicita además argumentar las explicaciones. Los rectángulos no tienen explícitas las medidas de los lados y los maestros no disponen de reglas para medir.

Los maestros se agrupan e inician la actividad durante la cual hay una gran participación de todos los grupos. Para algunos grupos la primera pareja de rectángulos parece ser la que cumple con la propiedad de que los lados son proporcionales, porque la diferencia entre los lados del rectángulo mayor y el rectángulo menor es igual, mientras que en la segunda pareja de rectángulos esta propiedad no se cumple. Esta afirmación provoca un diálogo, ya que otro grupo afirma que la segunda pareja de rectángulos es la que cumple con la propiedad de que los lados son proporcionales. Para este grupo, al trazar las diagonales de los rectángulos, se observa que aparecen dos triángulos semejantes, por lo que los lados correspondientes son proporcionales. Así pues, de acuerdo con la figura siguiente:



$\frac{y}{x} = \frac{c}{d}$, de donde los dos rectángulos tienen los lados proporcionales.

Otro grupo señala, que al lado x se le ha agregado una cantidad **a** de unidades y que al lado y se le ha agregado una cantidad **b** de unidades, $\mathbf{a} \neq \mathbf{b}$, por lo que los lados no son proporcionales. En este momento el profesor interviene y aclara al grupo que verifiquen si al tener una fracción como $\frac{2}{3}$ ella cambia o no al agregar 1 al numerador y al denominador. El grupo verifica y comprueba que

efectivamente, como se vio en la ACTIVIDAD 3-2, $\frac{2+1}{3+1} = \frac{3}{4}$ y $\frac{3}{4} \neq \frac{2}{3}$, por lo que se percatan de que están en un error. Ellos continúan, y señalan que como $\frac{y}{x} = \frac{c}{d}$, $c = y + b$, $d = x + a$, entonces: $\frac{y}{x} = \frac{y+b}{x+a}$, de donde $x\,y + ay = x\,y + bx$, por lo tanto $ay = bx$, es decir, $\frac{y}{x} = \frac{b}{a}$.
Así pues, las cantidades **a** y **b** que se agregan son proporcionales.

ACTIVIDAD 4-5

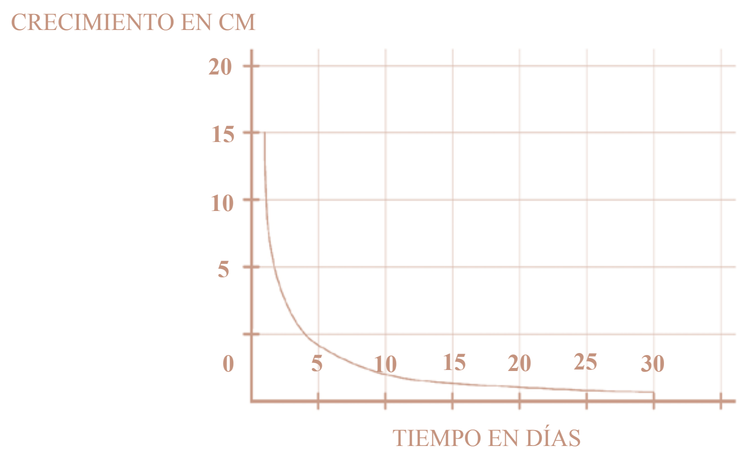
La profesora de Matemática de la escuela Normal, se interesa en la formación de sus maestros en las Ciencias Naturales, integrando la Matemática como lenguaje científico. Decide realizar una actividad en la que los maestros deben medir durante 30 días el crecimiento de una planta que permanece en el aula de clases. La planta mide 10 cm cuando es llevada al salón. Con la actividad, ella desea introducir el tema de crecimiento y desarrollo de las plantas. Pero la actividad va más allá de este objetivo, pues la maestra espera que los alumnos relacionen el crecimiento de la planta y el tiempo de observación.

Después de algunos días, los maestros inician la toma de las medidas cada cierto tiempo y las colocan en una tabla que se muestra a continuación:

Día	Crecimiento en cm
1^0	20
4^0	5
10^0	2
15^0	1 1/3
20^0	1
25^0	4/5
30^0	2/3

Los maestros explican a la profesora que a medida que transcurre el tiempo el crecimiento de la planta disminuye, y que el crecimiento ha sido muy rápido al inicio, tal como le ocurre al ser humano. Los maestros preguntaron a la profesora: ¿Cuándo deja de crecer la planta? Antes de responderles, la profesora los invita a analizar los datos que han obtenido y les señala que es cierto, tal como lo han manifestado, que el crecimiento de la planta ha disminuido a medida que ha transcurrido el tiempo, pero existe una relación que no han expresado y que aparece en este caso. Observen que el producto del tiempo transcurrido y el crecimiento de la planta, siempre es constante. En efecto: $1x20 = 20$,

$4 \times 5 = 20$, $15 \times 1\frac{1}{3} = 20$. Si la magnitud tiempo se denota con la letra **t** y el crecimiento con la letra **a**, al trazar la gráfica del crecimiento en función del tiempo, se tiene:



La gráfica permite modelar el crecimiento de la planta en función del tiempo transcurrido y como el producto del crecimiento **a** y el tiempo **t**, a saber **at**, es constante, se tiene que at = 20, y se deduce que $a = \frac{20}{t}$. En este caso se dice que la constante de proporcionalidad es 20. La profesora agrega que el fenómeno que encontraron es el caso de dos magnitudes relacionadas de manera inversamente proporcional, y que como se ha visto, esto ocurre cuando al **aumentar el valor de una magnitud el valor de la otra disminuye de manera que el producto de estos valores se mantiene constante**. Para responder a la inquietud de algunos maestros sobre cuándo deja de crecer la planta, la profesora les explica que de acuerdo con la gráfica, el crecimiento va disminuyendo acercándose a cero, a medida que el tiempo aumenta, pero se trata de un modelo matemático; en la realidad la planta deja de crecer en un momento dado y finalmente muere.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: PROBLEMAS DE APLICACIÓN.

ACTIVIDAD 4-6

Una de las interpretaciones que se le dio a la fracción $\frac{a}{b}$ es la de razón. En la ACTIVIDAD 4-1 se definió razón entre dos números a y b, $b \neq 0$, a la relación $\frac{a}{b}$, por tal motivo la razón $\frac{a}{b}$ tiene infinitas fracciones equivalentes a ella. Por ejemplo, la fracción $\frac{3}{4}$ tiene como una de las fracciones equivalentes a ella la fracción $\frac{15}{20}$. Lo anterior se puede representar como $\frac{3}{4} = \frac{15}{20}$ ó 3 : 4 = 15 : 20 y se lee 3 es a 4 como 15 es a 20. Esta presentación sirve de base al profesor de Matemática para definir proporción. **Una proporción es la igualdad entre de dos razones**. Simbólicamente:

$\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ es una proporción y se representa como **a : b = c : d**, que se lee **a** es a **b** como **c** es a **d**; **a** y **d** se llaman **extremos** y **b** y **c** se llaman **medios**.

Con el propósito de aplicar el concepto de proporción en la solución de problemas, el profesor de Matemática le comenta a sus estudiantes que el filósofo y matemático griego, Tales, en un viaje que hizo a Egipto para pasar unas vacaciones, fue el primero en emplear el método de medir la altura de las pirámides por medio de la longitud de la sombra que proyectara en el suelo. Y para ejemplificar este método les propone el siguiente problema: Un soldado en Egipto observó que cuando su bastón colocado verticalmente arrojaba una sombra de 26 pulgadas de largo, la Gran Pirámide de Cheops arrojaba una sombra de unos 153 pasos de largo, medidos partiendo del centro de la base. Si el bastón tenía una longitud de 34 pulgadas y su paso abarcaba unos $2\frac{1}{2}$ pies, ¿Qué altura tenía la Pirámide?

El método para medir la altura de las pirámides consistía en plantear la igualdad de dos razones. Una razón era el cociente entre las sombras de la pirámide y de un objeto, en este caso el bastón, y la otra razón era entre las alturas, por lo que la proporción que debe resolverse es la siguiente:

153 pasos : 26 pulgadas = h : 34 pulgadas;
donde h es la altura de la pirámide y los 153 pasos equivalen a $153 \times 2\frac{1}{2}$ pies o sea:

$\frac{765}{2}$ pies. Y como cada pie tiene 12 pulgadas, se tiene que;

$\frac{765}{2}$ pies = $\frac{765}{2}$ x 12 pulgadas = 4590 pulgadas.

Luego la proporción por resolver es:

4590 pulgadas : 26 pulgadas = h : 34 pulgadas.

En este momento un estudiante le pregunta al profesor: ¿Cómo se encuentra el valor de h? El profesor aprovecha esta oportunidad y les recuerda que dada la proporción $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ se puede amplificar cada una de estas dos razones y ellas no se alteran, como lo estudiaron en las fracciones equivalentes. Por lo que amplifica ambas fracciones:

$\frac{a \times d}{b \times d} = \frac{c \times b}{d \times b}$ y como los denominadores son iguales, entonces los numeradores son iguales, luego:

a x d = b x c, expresión que se conoce como la **Propiedad fundamental de las proporciones**, **"*En toda proporción el producto de los extremos es igual al producto de los medios*"**.

Aplicando esta propiedad en la proporción por resolver:
4590 pulgadas : 26 pulgadas = h : 34 pulgadas se tiene que:
26 pulgadas x h = 4590 pulgadas x 34 pulgadas, luego,

$$h = \frac{4590 \text{ pulgadas} \times 34 \text{ pulgadas}}{26 \text{ pulgadas}} = 6002{,}3 \text{ pulgadas}$$

Por lo que la Pirámide de Cheops tiene una altura aproximada de 500 pies.

ACTIVIDAD 4-7

La Sra. Bonilla desea pintar su casa para La Navidad. Habla con una cuadrilla de 3 hombres que pueden pintar la casa en 8 días. Al comentarle a su esposo, éste le dice que 8 días le parecen mucho, que les diga que él desea que se haga el trabajo en 6 días, trabajando el mismo número de horas diarias. La Sra. Bonilla aprendió en su formación académica cómo trabajar con proporciones, por lo que decide resolver el problema e informarle al jefe de la cuadrilla cuántos hombres necesitará emplear para cumplir con el deseo de su esposo.

La Sra. Bonilla recuerda que este tipo de problema se resuelve planteando una regla de tres simple, ya que sólo intervienen dos magnitudes: el número de pintores y el número de días. Además, ella sabe que existen dos tipos de regla de tres simple: la regla de tres simple directa y la regla de tres simple inversa.

Una regla de tres es simple directa si las magnitudes que aparecen en el problema son directamente proporcionales, es decir, si al multiplicar una cantidad de una magnitud por un número la otra queda multiplicada por el mismo número.

Y la regla de tres es simple inversa si se trata de magnitudes inversamente proporcionales, es decir, el producto de las cantidades de las dos magnitudes es constante, por lo que al multiplicar una de las cantidades de una magnitud por un número la otra queda dividida por el mismo número.

En los problemas de regla de tres simple directa, como las magnitudes son directamente proporcionales la razón entre dos cantidades de la misma magnitud es igual a la razón de la otra; mientras que en la regla de tres simple inversa, como las magnitudes son inversamente proporcionales, la razón entre dos cantidades de la misma magnitud es igual a la razón inversa de la otra.

Antes de resolver el problema, sobre la cantidad de personas para pintar la casa, la Sra. Bonilla lo analiza y determina que se trata de un caso de proporcionalidad inversa, ya que al disminuir el número de días en pintar la casa, aumentará el número de pintores que harán el trabajo; de forma que el producto del número de obreros por los días en pintar la casa es constante.

La Sra. Bonilla se plantea el problema de la siguiente manera:

Número de pintores	Número de días en pintar la casa
3	8
p	6

Como la proporción es inversa se tiene que 3 x 8 = p x 6. Por lo que $p = \frac{3 \times 8}{6} = 4$.

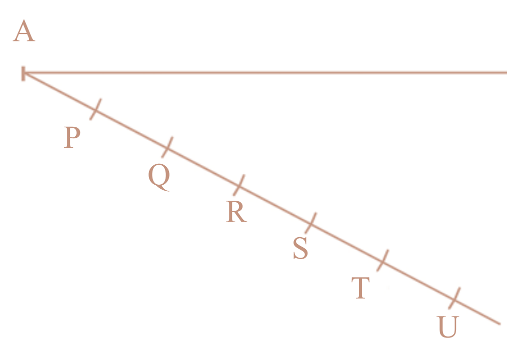
Cuatro pintores pintarán la casa en 6 días.

ACTIVIDAD 4-8

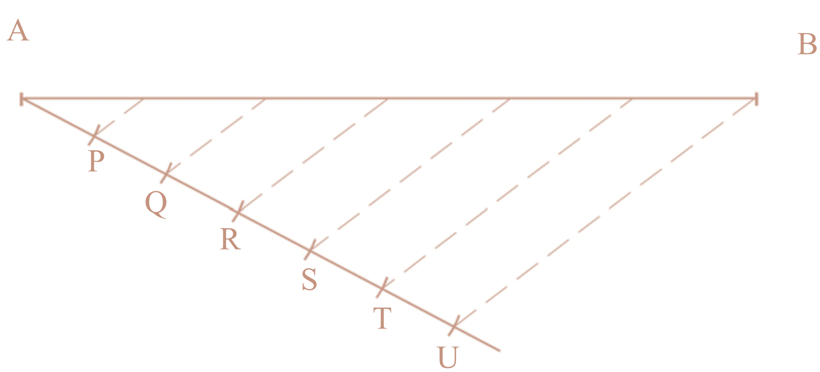
La profesora de Ciencias le solicita a Andrés que divida el segmento AB en 6 partes iguales.

Andrés no encuentra, en su juego de geometría, la regla graduada pero sí tiene un compás y una escuadra que no tiene graduación. Decide hacer la construcción con estos dos instrumentos, y pone en práctica el procedimiento que aprendió el año anterior. Hace la división del segmento AB en 6 partes iguales y lo entrega a la profesora. Ana, otra estudiante del mismo grupo, le pregunta: ¿Cómo lo hiciste? y Andrés le explica:

Toma el segmento AB y a partir del extremo A traza una semirrecta. Sobre esta semirrecta y a partir de A, con una misma abertura del compás, marca 6 puntos uno a continuación del otro. Los puntos sobre la semirrecta los puedes llamar P, Q, R, S, T, U, tal como observas en la figura:



Une el extremo B del segmento AB, el cual quieres dividir en 6 partes iguales, con el extremo U. Luego trazas paralelas al segmento BU que pasen por los puntos P. Q. R, S y T, y obtienes la división del segmento AB en 6 partes iguales como puedes observar también en la figura:



Luego de algunos comentarios entre Ana y Andrés se cuestionan sobre el porqué de la construcción hecha. Investigan y encuentran el Teorema de Tales que les justifica el procedimiento efectuado: "***Si varias paralelas cortan a dos transversales determinan en ellas segmentos correspondientes proporcionales***". Siguen comentando cómo lo aprendido en Matemática sobre las proporciones, les ha ayudado a resolver un problema práctico como el que les presentó la profesora de Ciencias.

ACTIVIDAD 4-9

Para los festejos de los días patrios la dirección de una escuela decide, por motivos de organización, que el 15% de los alumnos de cada grado de primaria participe en los desfiles.

Un profesor solicita a sus alumnos, futuros maestros, calcular la participación, por grado, de los alumnos de la escuela, en los desfiles y explicar si la selección ha sido proporcional. La información que suministra el profesor a los maestros en formación es la siguiente: hay 200 alumnos en primer grado, 180 alumnos en segundo grado, 140 alumnos en tercer grado, 120 alumnos en cuarto grado, 100 alumnos en quinto grado y 80 alumnos en sexto grado. Los maestros plantean una proporción igualando la razón 15 : 100, que representa el 15%, a la razón entre el número de alumnos que deben asistir al desfile por cada grado y el total de alumnos por grado y luego la resuelven, tal como se muestra a continuación:

Primer grado:
$15 : 100 = p : 200$

$$p = \frac{15 \times 200}{100} = 30,$$ deben asistir 30 alumnos de primer grado.

Segundo grado:
$15 : 100 = s : 180$

$$s = \frac{15 \times 180}{100} = 27,$$ deben asistir 27 alumnos de segundo grado.

Tercer grado:
$15 : 100 = t : 140$

$$t = \frac{15 \times 140}{100} = 21,$$ deben asistir 21 alumnos de tercer grado.

Cuarto grado:
$15 : 100 = c : 120$

$$c = \frac{15 \times 120}{100} = 18,$$ deben asistir 18 alumnos de cuarto grado.

Quinto grado:
$15 : 100 = q : 100$

$$q = \frac{15 \times 100}{100} = 15,$$ deben asistir 15 alumnos de quinto grado.

Sexto grado:
15 : 100 = x : 80

$$x = \frac{15 \times 80}{100} = 12$$, deben asistir 12 alumnos de sexto grado.

Los futuros maestros explican al profesor que $15\% = \frac{15}{100} = \frac{3}{20}$, lo que equivale a decir que deben asistir 3 por cada 20 alumnos en cada grado.

Y al encontrar que de primer grado deben participar 30 de los 200 alumnos, de segundo grado deben asistir 27 de los 180 alumnos, de tercer grado 21 de los 140 alumnos, de cuarto grado 18 de los 120 alumnos, de quinto grado deben asistir 15 de los 100 alumnos y de sexto grado deben participar en el desfile 12 de los 80 alumnos, se tiene que efectivamente la razón que hay entre la cantidad de alumnos que desfilarán por grado y el total de alumnos en cada grado es equivalente a $\frac{3}{20}$. Lo anterior lo expresan mediante la igualdad de las razones:

$\frac{30}{200} = \frac{27}{180} = \frac{21}{140} = \frac{18}{120} = \frac{15}{100} = \frac{12}{80} = \frac{3}{20}$, por lo que efectivamente la participación de los grupos será proporcional.

ACTIVIDAD 4-10

El profesor de Estadística solicita a sus alumnos que le hagan una representación, por medio de una gráfica circular, de la información que le presentaron en la tabla sobre el porcentaje de alumnos en cada uno de los intervalos de edades que se indican:

Porcentaje (%)	Edades en años
15	15 - 17
20	12 - 14
25	9 - 11
40	6 - 8

Julio César, que había sido nombrado jefe de uno de los grupos, dirigió la tarea. Comentaron que deberían encontrar el sector circular que representara cada intervalo de edades de los estudiantes de la escuela. Y esto era necesario, porque los sectores circulares debían ser directamente proporcionales a los porcentajes que indicaba la tabla.

Uno de los integrantes del grupo comentó que él sabía que todo el círculo representaba el 100%, entonces era cosa de encontrar: ¿Qué parte del círculo es el 15%, qué parte el 20%, el 25% y el 40%?

Otro estudiante planteó que el ángulo central mayor del círculo mide 360º, entonces lo que se debe buscar es la medida de cada ángulo central para trazar el sector circular que representa, en cada caso, el intervalo de edad. Y para esto es necesario conocer cuántos grados representa cada uno de los porcentajes. Se deberá resolver las siguientes proporciones:

Porcentajes	Grados del ángulo central
100	360
15	a

100: 15 = 360 : a

$a = \dfrac{360 \times 15}{100} = 54.$ Luego el sector circular que representa el intervalo de edades de 15 – 17 años tiene un ángulo central de 54º.

Y en igual forma para encontrar el ángulo central del sector que representa el 20% se resuelve la proporción:

100: 20 = 360 : b

$b = \dfrac{360 \times 20}{100} = 72.$ El sector circular que representa el intervalo de edades 12 – 14 años tiene un ángulo central de 72º.

Para el 25% se resuelve la proporción:

100 : 25 = 360 : c

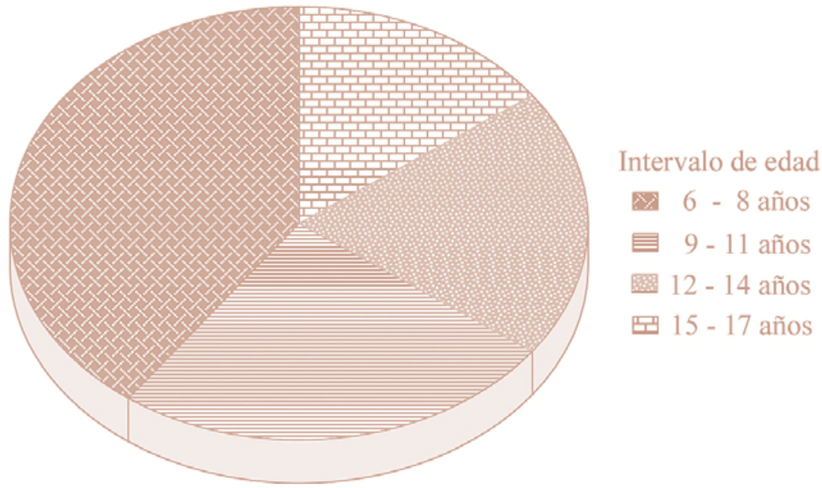
$c = \dfrac{360 \times 25}{100} = 90.$ El sector circular que representa el intervalo de edades 9-11 años tiene un ángulo central de 90º.

Finalmente, para determinar el sector circular que representa el intervalo de edades 6 – 8 años, se resuelve la proporción:

100 : 40 = 360 : d

$c = \dfrac{360 \times 40}{100} = 144.$ El intervalo 6-8 años estará representado por un sector circular que tiene un ángulo central de 144º.

Una vez encontrado cada uno de los ángulos proporcionales a los porcentajes indicados, hacen la gráfica y entregan la tarea.



ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

I. Identifica si las magnitudes que intervienen en cada enunciado se relacionan de manera directamente o inversamente proporcionales:

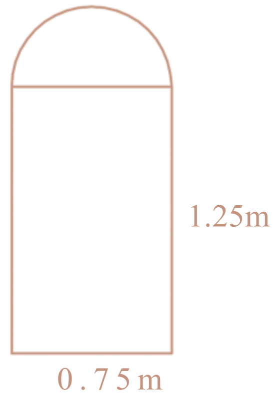
1. El salario devengado y el número de días trabajados.
2. La cantidad de agua arrojada por un grifo y el tiempo transcurrido.
3. La velocidad y el tiempo en recorrer una distancia.
4. La distancia entre dos poblaciones y la medida de esa distancia en un mapa.
5. La cantidad de personas y los días que duran los alimentos.
6. La cantidad de litros de sangre que bombea el corazón del ser humano en reposo y los minutos transcurridos.
7. La altura de una persona y la longitud de la sombra que el sol proyecta en el suelo.
8. Número de metros cuadrados que se pintan de una pared y el número de horas que se utiliza para pintarla.

II. Resuelva los siguientes problemas

1. La maestra de Claudia, le solicita ampliar su dibujo para exponerlo en el mural. El dibujo tiene un marco rectangular cuyas dimensiones son 18 cm y 10 cm. La ampliación la debe hacer Claudia en una fotocopiadora solicitando que la ampliación sea de un 25 %. ¿Cuáles son las dimensiones del marco del dibujo ampliado? Verifica que la fotocopiadora amplió proporcionalmente el dibujo de Claudia de manera que éste no se haya distorsionado.

2. Si por cada $50,00 de compras, un almacén hace un descuento del 10 %, ¿Cuánto pagará Mayra si gasta $556,00?

3. La fachada de la casa de Juan tiene de un costado una ventana que tiene la forma que se indica en la figura. Desean agrandar la ventana manteniendo la proporcionalidad y para ello deciden que el lado que mide 0,75 m pase a medir 1,50 m. ¿Cuáles serán las otras dimensiones de la ventana agrandada?



4. La maestra deja de tarea a sus alumnos el siguiente problema: cinco niños desean comprar 100 hojas blancas que cuestan $2,50 y deciden contribuir con lo que tienen para la compra. La contribución es la siguiente: $0,50; $0,25; $0,75; $0,35; $0,65. ¿Cuántas hojas le toca a cada niño si la distribución la desean proporcional al aporte de cada uno? Hagan una gráfica de la cantidad de hojas en función del aporte de cada niño. ¿Qué características tiene la gráfica?

5. En una prueba de Español de 40 puntos, Raúl obtuvo 30 puntos. ¿Cuántos puntos debe tener Sara en otra prueba de 60 puntos para obtener la misma calificación que Raúl?, si para aprobar el examen deben tener un porcentaje no inferior al 70% en la prueba, ¿Aprobaron el examen Sara y Raúl?

6. Divide el siguiente segmento RS en 8 partes iguales, sin hacer uso de una regla graduada.

SUGERENCIAS DE SOLUCIÓN

I. Atendiendo a la definición de magnitudes directamente proporcionales e inversamente proporcionales, se determinó el tipo de proporcionalidad existente entre las magnitudes señaladas en cada uno de los incisos de la siguiente manera:

1. El salario devengado es directamente proporcional al número de días trabajados. A mayor número de días trabajados, mayor salario.
2. La cantidad de agua arrojada es directamente proporcional al tiempo transcurrido. Mientras más tiempo permanezca el grifo abierto, mayor cantidad de agua arrojará.
3. La velocidad es inversamente proporcional al tiempo en recorrer una distancia. A mayor velocidad, menos tiempo en recorrer una cierta distancia.
4. La distancia entre dos poblaciones es directamente proporcional a la medida de esa distancia en un mapa. A mayor distancia entre dos poblaciones, mayor la distancia entre las dos en un mapa.

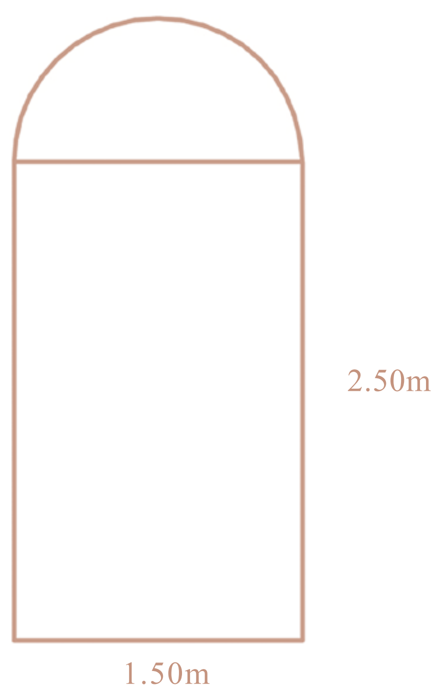
5. La cantidad de personas es inversamente proporcional al número de días que duran los alimentos. Si el número de personas aumenta, disminuyen los días que duran los alimentos.
6. La cantidad de litros de sangre que bombea el corazón del ser humano en reposo es directamente proporcional al tiempo. Mientras mayor es el número de minutos transcurrido, mayor es la cantidad de sangre que bombea el ser humano.
7. La altura de una persona es directamente proporcional a la longitud de la sombra que proyecta el sol. A mayor altura de la persona, mayor la sombra que proyecta.
8. El número de metros cuadrados de la pared que se pinta es directamente proporcional al tiempo que se utilice para pintarla. Mientras más metros cuadrados de pared se pinten, mayor el tiempo transcurrido.

II. Sugerencias para la solución de los problemas

1. Claudia amplía el dibujo en un 25% y mide los lados del marco del dibujo y encuentra que son 22,5 cm y 12,5 cm. Esto significa que los lados se incrementaron en 4,5 cm y 2,5 cm respectivamente. Ella verifica que 4,5 es el 25 % de 18, ya que $\frac{25}{100}$ x 18 = 4,5. De igual manera verifica que 2,5 es el 25 % de 10. Claudia se percata de que una fotocopiadora al ampliar en un 25 % un dibujo rectangular, lo hace agrandando los lados del 25 % y no el área del 25 % como ella creía. Al establecer la razón entre los lados del marco rectangular original y el ampliado se encuentra que $\frac{18}{10} = \frac{22{,}5}{12{,}5}$, lo que indica que el dibujo ha sido ampliado proporcionalmente.

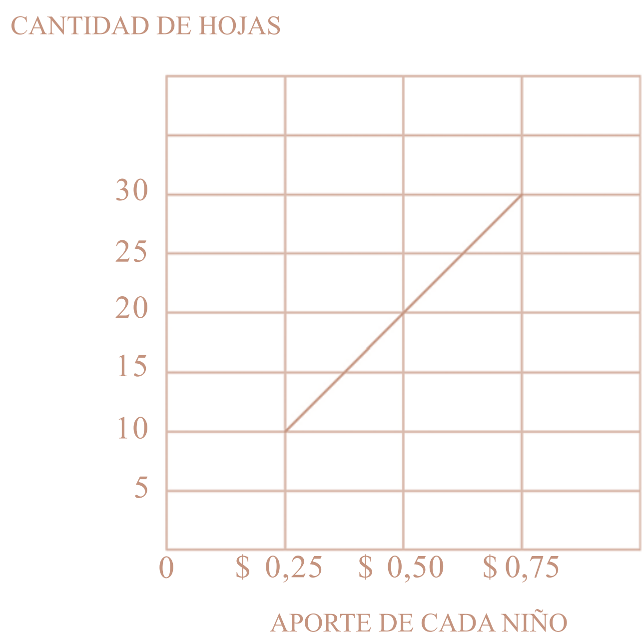
2. El descuento es por cada $50,00, entonces a Mayra le descuentan el 10% de $550,00 o sea $55,00. Así, ella pagará $556,00 - $55,00 = $501,00.

3. La ventana agrandada tiene las siguientes dimensiones:



Una parte de la ventana es de forma rectangular, y el lado que media 0,75 m se aumenta a 1,50 m, luego como la ampliación es proporcional se tiene que $\frac{0,75}{1,50} = \frac{1,25}{x}$ de donde $x = \frac{1,50 \times 1,25}{0,75} = 2,50$ o sea que el otro lado de la ventana medirá 2,50 m. La parte superior es un semicírculo de radio 0,375 m, éste aumentará a 0,75 m.

4. Como se compran 100 hojas al precio de $2,50, quiere decir que al niño que aportó $0,50 le tocan 20 hojas, ya que $\frac{100}{\$2,50} = \frac{x}{\$0,50}$, de donde x = 20 hojas. De igual manera se calcula el número de hojas que le toca al resto de los niños y resulta que el que aportó $0,25 le corresponden 10 hojas, el niño que aportó $0,75 le corresponde 30 hojas, el que aportó $0,35 le corresponde 14 hojas, el que aportó $0,65 le corresponden 26 hojas. La gráfica es una recta que pasa por el origen, lo que muestra que las magnitudes involucradas son directamente proporcionales y la constante de proporcionalidad es 0,025.



5. Se trata de un problema de proporcionalidad directa. Hay que resolver la proporción:
30 : p = 40 : 60; luego $p = \frac{30 \times 60}{40} = 45$.

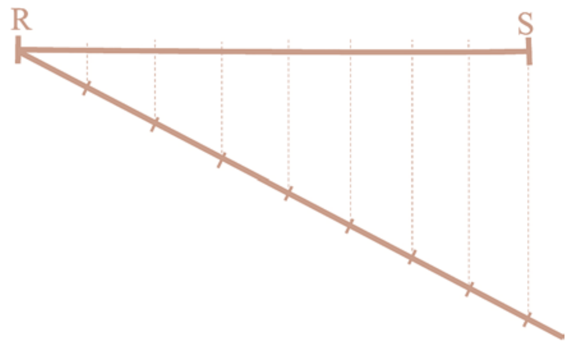
Sara debe obtener 45 puntos en la prueba de 60 puntos para ganar la misma calificación que Raúl.

Para determinar si Sara y Raúl aprobaron la prueba, se resuelve la proporción:

60 : 45 = 100 : a; por lo que $a = \frac{45 \times 100}{60} = 75$.

Sara y Raúl aprobaron, ya que tienen un 75 % de la prueba.

6. El segmento RS esta dividido en 8 partes iguales sin hacer uso de la regla graduada, utilizando el Teorema de Tales, tal como se vió en la ACTIVIDAD 4-8.



CAPÍTULO V

PERÍMETRO Y ÁREA, EL CONFLICTO ENTRE DOS CONCEPTOS

RESEÑA HISTÓRICA

Así como la Aritmética tuvo sus orígenes en cuestiones prácticas como las transacciones comerciales entre los fenicios, la Geometría nace de la necesidad de medir áreas de terrenos.

El historiador griego Heródoto de Halicarnaso (405-430 a.C.), quien conocía muy bien Egipto, señala que Ramsés II (1300 a.C.):

> *"…distribuía la tierra entre todos los egipcios en lotes rectangulares iguales, a los cuales les imponía un impuesto anual; cuando el Río Nilo barría una porción de un lote y el dueño aplicaba por una correspondiente en el impuesto, agrimensores tenían que ser enviados a certificar que la reducción en el área se había dado* (Boyer, 1968, p. 38)."

Vemos pues, que la Geometría, palabra que etimológicamente significa "*medida de la tierra*", surge de la necesidad de aplicaciones prácticas.

En el Papiro de Rhind, principal fuente de información de los egipcios, la formulación y solución de los problemas 49,50 y 51 son testimonios de los cálculos de áreas de parcelas de terreno en forma triangular y rectangular. En el problema 49 se calcula el área del triángulo como el semiproducto de dos números que constituyen la base y la altura del triángulo; en el problema 50 se calcula el área del rectángulo como el producto de la base por la altura del mismo y en el problema 51 se hacen cálculos de áreas de triángulos truncados.

Los geómetras griegos habían "*cuadrado*" todos los polígonos y pensaron que también podrían "*cuadrar*" el círculo, o sea, como lo indica su nombre, tratar de construir utilizando solamente la regla y el compás el lado de un cuadrado que tenga la misma área que un círculo dado. Éste es uno de los tres problemas clásicos de los griegos. Se cree que el problema fue planteado antes del siglo V a.C., puesto que en su comedia Los Pájaros, Aristófanes satiriza al astrónomo Metón, nacido cerca del año 460 a.C., quien lleva consigo una regla y un compás "*para que su círculo pueda ser cuadrado*" (Heath, 1960, p. 220).

Por otra parte, el término perímetro es tan antiguo como el de área. Los babilonios en su afán por descubrir las propiedades de la circunferencia dedujeron que la relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro era igual a 3 y esto lo hallaron considerando que la longitud de la circunferencia era un valor intermedio entre los perímetros de los cuadrados inscritos y circunscritos a una circunferencia. Encontraron que el perímetro de un círculo de radio r es 6r. Arquímedes (287-212 a.C.) calculó un valor más aproximado a esta relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro, para lo cual consideró la sucesión de polígonos regulares inscritos y circunscritos en un círculo, considerando polígonos hasta de 96 lados.

ALGUNOS RESULTADOS DE INVESTIGACIONES

Una de las investigaciones de mayor relevancia que intenta explicar cómo se produce en los estudiantes el desarrollo del razonamiento geométrico, es la de los esposos Van Hiele, quienes en su tesis para optar por el título de Doctores en Ciencias de la Educación en la Universidad de Utrech, Holanda en 1957, explican cómo se da la evolución del pensamiento geométrico. La primera parte del Modelo describe los distintos niveles por los que pasa el estudiante desde el razonamiento intuitivo hasta el razonamiento formal y abstracto.

Los niveles de razonamiento según el Modelo de Van Hiele son cinco: visualización o reconocimiento, donde el estudiante se familiariza con el objeto geométrico; análisis, nivel donde el estudiante empieza a identificar las propiedades de una figura; clasificación o deducción informal, el estudiante observa las interrelaciones de las propiedades de la figura; deducción formal, refleja la combinación de análisis, síntesis y comparación y el quinto nivel es el de rigor, aquí se establecen comparaciones entre distintos sistemas axiomáticos.

El conocimiento del modelo permite al docente, además de identificar en qué nivel se encuentra un estudiante, proponer actividades que logren que éste pueda avanzar a un nivel de razonamiento más alto. Por ejemplo, el estudiante que se encuentra en el nivel de análisis identifica las propiedades del cuadrado, pero no puede deducir que el cuadrado tiene las propiedades del rombo y del rectángulo. Es necesario entonces, proponer actividades para lograr el paso de un nivel de razonamiento geométrico a otro.

En Crowley (1987) se pueden encontrar actividades para desarrollar la enseñanza de los cuatro primeros niveles. Cada nivel tiene sus propias actividades a desarrollar entre las que se puede citar: permita que el estudiante recorte, dibuje, utilice el geoplano, utilice el juego de geometría, use plegados de papel, compare figuras geométricas, utilice cuadros comparativos, defina una figura con las mínimas propiedades, justifique su aseveración, enuncie el recíproco de una proposición, compare diferentes demostraciones.

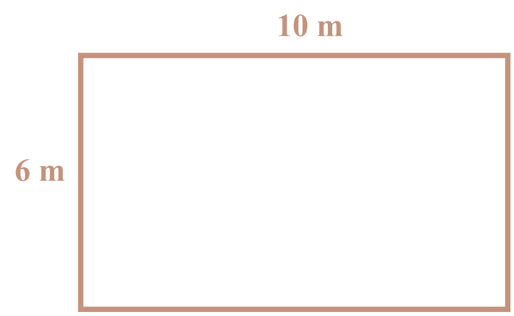
Según investigaciones, el quinto nivel, el de rigor, sólo se encuentra en matemáticos profesionales y en algunos estudiantes de la carrera de Matemática. Este nivel fue poco estudiado por los Van Hiele debido a que eran profesores de Geometría en la Escuela Secundaria de Montessori, Italia.

En la segunda parte del modelo se propone cinco fases de aprendizaje secuenciales para que el estudiante alcance el nivel de razonamiento superior. Las fases son: información, orientación, explicitación, orientación libre e integración.

Dentro de las nociones más estudiadas, a través del currículo de educación primaria, están las de perímetro y área. Sin embargo, según un sondeo realizado en una escuela de formación de maestros, no son muchas las diferencias de orientaciones al enseñar los conceptos de área y perímetro. Generalmente, las orientaciones se limitan al cálculo del área y perímetro del rectángulo en primer lugar, seguido del triángulo, quedando el alumnado con el recuerdo de fórmulas y ajeno a los conceptos mencionados. Así lo confirman las experiencias con maestros que al preguntarles sobre el perímetro de un triángulo, por ejemplo, manifiestan haber olvidado la fórmula.

Una investigación realizada por el Programa Nacional de Supervisión de los E.E.U.U. (N.A.E.P.) citada en Dickson y otros (1991), nos muestra que al aplicarle a niños de nueve años de edad una prueba sobre el cálculo del perímetro de un rectángulo donde aparecían las siguientes preguntas:

a) ¿Qué distancia hay que recorrer para rodear del todo este rectángulo?
b) ¿Qué perímetro tiene este rectángulo?



los resultados fueron los siguientes:

El 40% de los niños a los que se les aplicó la prueba contestaron correctamente a la pregunta a, mientras que sólo el 8% respondió correctamente a la pregunta b.

Una de las causas de tan variado porcentaje de respuestas correctas a una misma interrogante, se pudo deber al hecho de que los niños desconocían el significado de la palabra perímetro. Hay palabras que tienen solamente una acepción en un contexto por lo que es posible, entonces, que al ser la palabra perímetro escuchada por el niño sólo en las clases de Matemática, no haya tenido la oportunidad de incluirla en su vocabulario y así tener una concepción clara de lo que ella significa.

Con frecuencia nos encontramos con que los niños tienen tendencia a retener fórmulas para calcular perímetros y áreas sin lograr comprender el concepto mencionado. Fácilmente pueden repetir que el área de un rectángulo es igual a la base por la altura, pero tal como lo señala Dienes, en Dickson y otros (1991): *"los niños no pueden ver cómo una mera multiplicación puede convertir súbitamente, como por arte de magia, los centímetros en centímetros cuadrados"* (p. 97).

El hecho de que las longitudes que conocen en un rectángulo, por ejemplo, uno de 6 cm de base y 3 cm de altura se convierta en 18 cm^2 cuando se calcula el área, no es comprendido fácilmente por los niños. El concepto de área como cantidad de superficie se va desarrollando muy lentamente en el niño. Aunque en los primeros años de primaria se encuentra con situaciones en las que tiene que

comparar diferentes superficies, y esto lo hace colocando un objeto encima de otro, transcurrirá mucho tiempo hasta cuando sea capaz de calcular el área de una figura como, la de un cuadrado, rectángulo o círculo.
Cuando niños de 6 años de edad comparan áreas de rectángulos, se enfocan más en una dimensión del rectángulo que en las dos dimensiones del espacio en que se encuentra, de acuerdo con Piaget, tal como lo señala Wilson y Rowland (1993).

A B

Si se muestra a los niños dos rectángulos como los de la figura anterior, algunos piensan que el rectángulo A tiene mayor área que el rectángulo B, sin embargo, el rectángulo de la figura A tiene un área de 6 unidades cuadradas y el rectángulo de la figura B tiene un área de 9 unidades cuadradas. (Wilson & Rowland, 1993)

El niño necesita, como lo señala Lovell, K. (1986): *"centrarse cada vez sobre un aspecto de la superficie, por ejemplo, su largura y dirá que una superficie más larga es más grande"* (p. 137). El niño dice: *"esta página es más grande",* cuando lo que quiere decir es que su área es mayor que la de otra.

Es necesario interiorizar los conceptos de perímetro y área con actividades que permitan ir elaborando estos conceptos, primero intuitivamente, luego formalizarlos para que no simplemente se reciten o se apliquen fórmulas, sino que se comprendan. Por lo que las actividades que se presentan en la obra tienen el propósito de mostrar que: *"se pueden imaginar que la longitud es una serie de longitudes unitarias una tras otra, que el área es un conjunto de cuadrados unitarios…"* (Avances ,1998, p. 218)

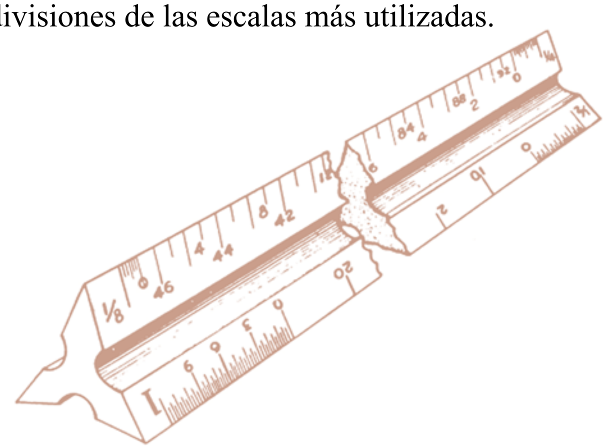
El tema sobre escalas es también introducido en este capítulo, ya que es de interés para los maestros en formación debido a que este concepto está estrechamente ligado al concepto de medida. Hoy en día los maestros tratan en sus aulas de clases, temas de ciencia que son prácticamente incomprensibles para muchos, debido a que entrañan fenómenos en escalas lejanas a la experiencia humana como la velocidad de la luz y la distancia entre las estrellas y planetas. También se refieren a dimensiones minúsculas como el tamaño de una molécula o átomo.

Uno de los propósitos de presentar este tema es despertar en el maestro en formación el sentido del cambio de propiedades y relaciones de los objetos cuando se cambia la escala. Así, una foto de una pista de fútbol, tomada desde un avión a diferentes alturas, tendrá diferentes escalas; si un objeto cambia de tamaño, el volumen cambia desproporcionalmente al área. Además, es importante mostrar que los dibujos a escala muestran las figuras y permiten comparar las cosas de tamaños diferentes.

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: LA ESCALA

ACTIVIDAD 5-1

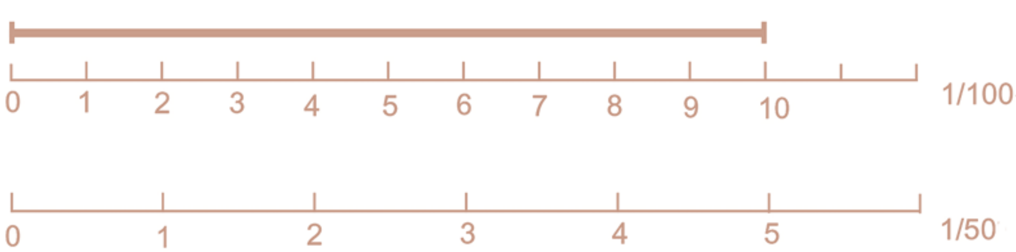
Entre los profesionales que más utilizan las escalas, proporción entre las dimensiones de un dibujo, plano, maqueta, entre otras y las del objeto representado, se encuentran los arquitectos. Ellos utilizan el escalímetro que es un instrumento graduado que sirve para medir el tamaño natural de los objetos o para llevar a escala el tamaño del objeto. Un objeto puede dibujarse a escala natural, ampliarlo o reducirlo a conveniencia. Este instrumento tiene forma plana o triangular, en cuyos bordes vienen señalados por trazos las divisiones de las escalas más utilizadas.



Algunas de las escalas que se indican en el escalímetro son 1/100, lo que significa que cada cm en el plano es un metro en la realidad; 1/200, que indica que un metro ha sido dividido en 200 partes y cada una de ellas representa un metro en la realidad; la escala 1/50 indica que cada metro ha sido dividido en 50 partes y cada una de ellas representa un metro de la realidad.

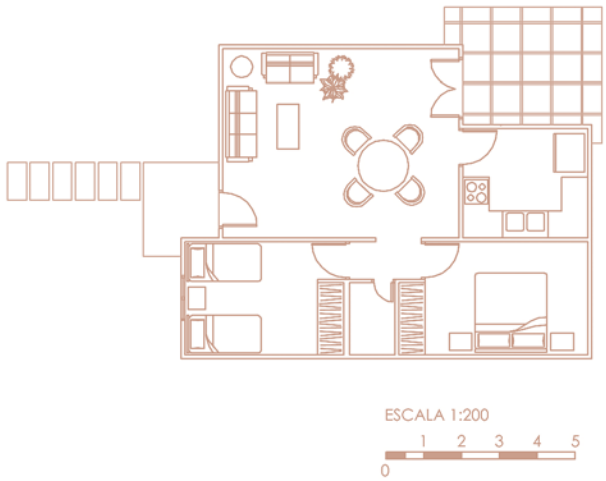
Supóngase que se tiene el siguiente segmento y se indica que está en la escala 1/100.

¿Cuánto mide el segmento en esta escala? Para encontrar esta medida se utiliza el escalímetro en la escala 1/100.



Se encuentra que mide 10 m. Si el segmento hubiese estado en la escala 1/50, mediría 5 m. Y si hubiera estado en la escala 1/200, ¿Cuánto mediría el segmento?

Un arquitecto presenta el siguiente plano de una casa e indica que está en la escala 1/200. Se quiere conocer las medidas reales de cada parte de la casa, para lo que se le invita a utilizar una regla graduada en cms si no cuenta con escalímetro y encontrar las dimensiones de la casa.



ACTIVIDAD 5-2

Esta actividad se genera a raíz de la curiosidad de Juan quien le pregunta a su maestra cómo hacer para conocer la altura de las 10 astas de banderas de alturas diferentes, que están plantadas frente a su escuela. La maestra organiza una actividad al aire libre con sus alumnos, con el propósito de calcular la altura de las 10 astas.

Se trata de calcular la altura de las astas, conocida la escala determinada por la medida de un asta y la medida de la sombra proyectada por el sol. En efecto, la maestra explica que conoce la altura del asta más alta y que con ese dato pueden calcular el resto de las alturas. Ella prepara una hoja con la información dada, de manera que los estudiantes puedan recoger los datos y hacer los cálculos. Los estudiantes miden las sombras de las 10 astas y llenan la tabla que les entrega la maestra. Las medidas que aparecen en la tabla que se muestra a continuación, son las encontradas por Juan. Recuerde que cada estudiante encuentra valores aproximados al valor exacto de la medida de la sombra.

Asta	Altura en m	Sombra en m
1	6,0	15,0
2		13,0
3		11,5
4		9,0
5		12,0
6		14,5
7		10,5
8		12,5
9		8,5
10		11,0

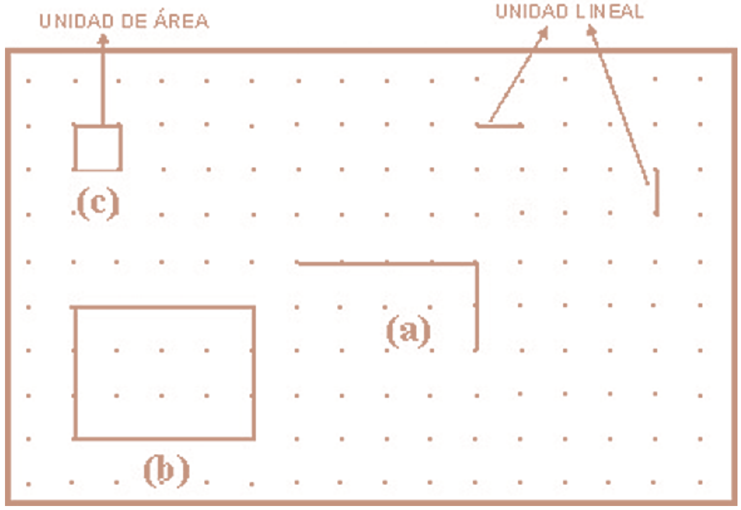
Para calcular la altura de cada asta Juan utiliza la escala 6/15 y las medidas de la sombra que proyectan las astas en el suelo, y observa que a medida que el asta sea más alta, la medida de la sombra proyectada es mayor y guardan la misma proporción. Por lo tanto, Juan sabe que si el asta de 6,0 m de altura tiene una sombra de 15,0 m entonces el asta cuya sombra es de 13,0 m tendrá una altura de h = 13,0 m x (6,0 m/15,0 m) = 5,2 m. De igual manera, el asta de 11,5 m de sombra tendrá una altura h = 11,5 m x (6,0 m/15,0 m) = 4,6 m. Del mismo modo se calculan las alturas del resto de las astas. Verifica que Juan calcule bien la altura de las astas mediante el procedimiento indicado y lo invita a comprobar sus resultados con los que se muestran en la tabla siguiente:

Asta	Altura en m	Sombra en m
1	6,0	15,0
2	5,2	13,0
3	4,6	11,5
4	3,6	9,0
5	4,8	12,0
6	5,8	14,5
7	4,2	10,5
8	5,0	12,5
9	3,4	8,5
10	4,4	11,0

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: PERÍMETRO Y ÁREA DEL RECTÁNGULO

ACTIVIDAD 5-3

En esta actividad, Ud. puede construir su propio material didáctico tal como lo ideó el matemático inglés Gattegno. Se trata del geoplano, el cual es una disposición rectangular (de madera, cartón u hojas de papel) que lleva una serie de puntos (con clavos, palitos) dispuestos en una red cuadrangular tal como se muestra en la figura:



Se trata de un material de múltiples usos en el aula de clases, en las lecciones de Geometría. Ahora se muestra cómo se enlaza la unidad lineal y la unidad de área para formar el perímetro y el área respectivamente.

Observe en la figura anterior, que la distancia entre dos puntos alineados vertical u horizontalmente, representa la **unidad lineal o longitud unitaria**. En el Sistema Internacional de Medidas esta unidad lineal puede representar kilómetro, metro, centímetro, milímetro, u otro múltiplo o submúltiplo del metro como también unidades de otro sistema de medida. Así por ejemplo, en la figura se puede observar que la línea poligonal (a) tiene una longitud de 6 unidades lineales y si cada unidad equivale a un metro, por ejemplo, se dice que la longitud es de 6 m. Si la unidad lineal es 1 km, la longitud de la línea poligonal es de 6 km.

Como Ud. ve, la longitud de la línea poligonal es de 6 longitudes unitarias una tras otra.

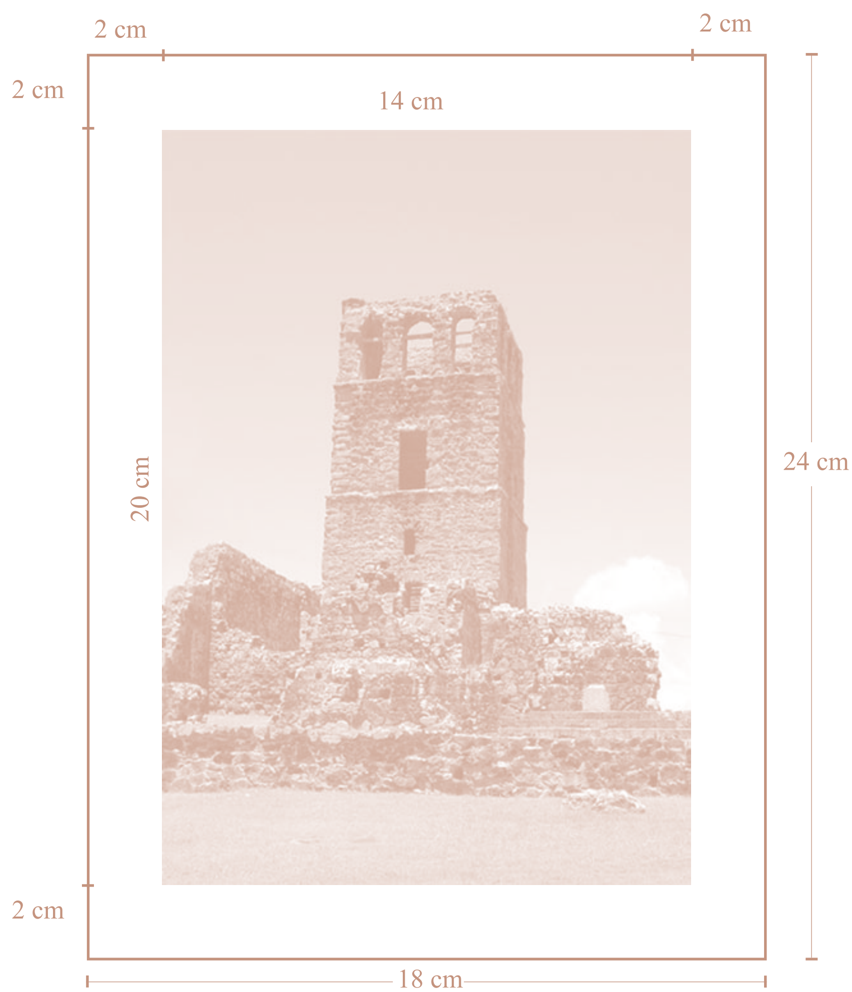
En la figura está representado un rectángulo (b), los lados del rectángulo forman una línea poligonal cerrada y si mide la longitud de esa línea se dará cuenta de que mide 14 unidades lineales. Si cada unidad lineal mide 1 cm se dice que la longitud de los lados del rectángulo mide 14 cm, si la unidad lineal es 1 mm entonces la longitud de los lados será de 14 mm. Por convención se denota esta longitud con la letra L y se llama **perímetro**.

En la figura se observa un cuadrado pequeño (c), el cual tiene dos dimensiones. Éste representa una **unidad de área o cuadrado unitario**. Si la medida del lado de este cuadrado es un milímetro, entonces la **unidad de área** es un milímetro cuadrado, si el lado mide un metro entonces la **unidad de área** es un metro cuadrado. Así, si el lado mide una unidad lineal cualquiera, la **unidad de área** es la unidad cuadrada. Una **unidad de área** puede ser kilómetro cuadrado, metro cuadrado, centímetro cuadrado u otra medida.

Observando el rectángulo (b), Ud. puede contar cuántos cuadrados unitarios caben en él. Observe que caben 12 cuadrados unitarios y en este caso se dice que el área del rectángulo es de 12 cuadrados unitarios. Si cada cuadrado unitario representa un metro cuadrado entonces decimos que el área del rectángulo es de 12 metros cuadrados que simbolizamos por 12 m^2. Si se denota el área con la letra A, se tiene A = 12 m^2. Observe que **el área es un conjunto de cuadrados unitarios**.

ACTIVIDAD 5-4

El Sr. González desea enmarcar una pintura que tiene dimensiones de 14 cm y 20 cm. Va a una casa de decoración y le informan que el precio depende del marco que escoja y del ancho de la viñeta que quiera que se le coloque. El marco seleccionado cuesta B/ 0,50 el cm y la viñeta B/ 0,25 el cm^2. ¿Cuánto le costará enmarcar la pintura si desea que la viñeta tenga un ancho de 2 cm?
El dependiente hace un dibujo donde plantea la situación.



Para determinar cuánto se necesita para el marco, el dependiente calcula la longitud de los tramos del marco. Tal como se muestra en la figura, necesita dos tramos de 18 cms y dos tramos de 24 cms.

longitud total = 2(18 cm) + 2(24 cm) = 36 cm + 48 cm = 84 cm.

Como se observó en la actividad anterior, para encontrar cualquier medida se necesita una unidad patrón, en el caso de determinar la longitud del marco del cuadro, el dependiente utiliza como unidad de medida el cm.

El área de la viñeta debe ser dada en unidades de área, y para este caso utiliza la del cuadrado de 1 cm de lado, o sea 1 cm^2.

El dependiente calcula el área de la viñeta determinando la de los rectángulos que están a la derecha y a la izquierda del cuadro. Cada uno de estos rectángulos contiene dos columnas de 24 cm^2 por lo que cada uno tiene un área de 2(24 cm^2) = 48 cm^2. Los rectángulos de arriba y abajo de la pintura tienen dos filas de 14 cm^2, es decir, tienen un área de 2(14 cm^2) = 28 cm^2.

El área total de la viñeta es la de dos rectángulos de 48 cm^2 cada uno y dos rectángulos de 28 cm^2 cada uno;

área total = $2(48\ cm^2) + 2(28\ cm^2) = 96\ cm^2 + 56\ cm^2 = 152\ cm^2$.
Ahora encuentra el costo del enmarcado, ya que conoce el **perímetro** del cuadro que le indica la **longitud** del marco que necesita, y la medida del **área** por cubrir por la viñeta.
El costo del marco es de B/ 0,50 x 84 = B/ 42,00
El costo de la viñeta es de B/ 0,25 x 152 = B/ 38,00
Por lo que el costo total del enmarcado es de B/ 42,00 + B/ 38,00 = B/ 80,00

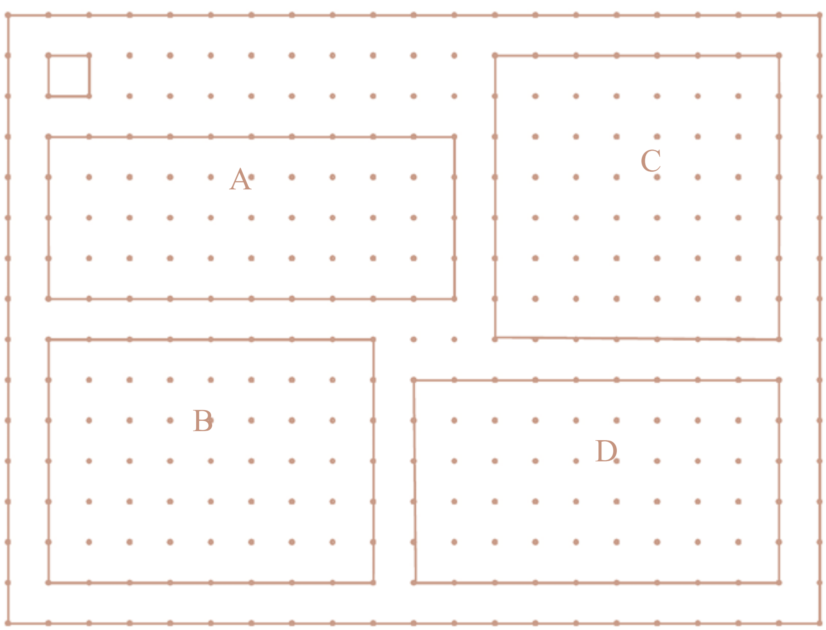
ACTIVIDAD 5-5

En el depósito de una escuela rural se tiene un rollo de alambre de 28 m, con el que se quiere cercar un área de terreno para sembrar hortalizas. Por las condiciones del terreno se pueden cercar regiones rectangulares con las siguientes dimensiones:

A) 4 m y 10 m
B) 6 m y 8 m
C) 7 m y 7 m
D) 5 m y 9 m

¿Con cuál de ellas se logrará cercar la mayor cantidad de área?

Si dibujamos cada uno de esos rectángulos en una hoja geoplano se tiene:



Cada cuadrito representa la unidad de área, que en este caso es 1 m^2.

Se observa entonces que:

El rectángulo A tiene 4 filas de 10 m^2 cada una, por lo que su área es de
$A = 4(10 \text{ m}^2) = 40 \text{ m}^2$

El rectángulo B tiene 6 filas de 8 m^2 cada una, su área es de
$A = 6(8 \text{ m}^2) = 48 \text{ m}^2$

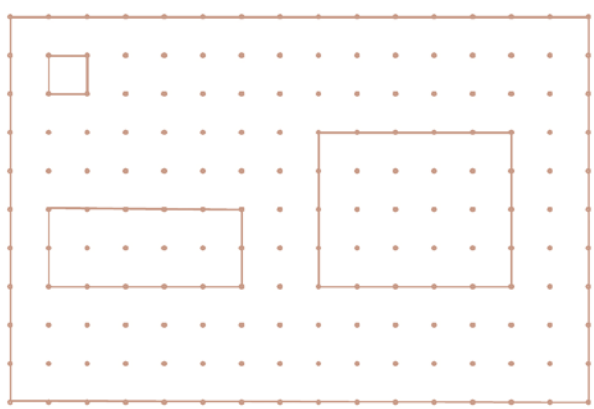
El rectángulo C tiene 7 filas de 7 m^2 cada una, su área es de
$A = 7(7 \text{ m}^2) = 49 \text{ m}^2$

El rectángulo D tiene 5 filas de 9 m^2 cada una, su área es de
$A = 5(9 \text{ m}^2) = 45 \text{ m}^2$

Como se observa, de los rectángulos dibujados, el de mayor área es el de 7m de lado o sea el cuadrado.

ACTIVIDAD 5-6

Ya Ud. se ha familiarizado con los conceptos de perímetro y área de figuras rectangulares en situaciones particulares. Veamos ahora cómo se calcula el perímetro y el área de cualquier figura rectangular. Para tal propósito se construye dos rectángulos: uno de dimensiones 5 m y 2 m y otro de dimensiones 5 m y 4 m como se muestra en la hoja geoplano.



La suma de las longitudes de los lados del primer rectángulo que se representa por la letra L, es
L = 2 x 5 m +2 x 2 m = 14 m. En este caso se dice que el perímetro del rectángulo es de 14 m.
La suma de las longitudes de los lados del segundo rectángulo es L = 2 x 4 m + 2 x 5 m = 18 m.

Si se tiene un rectángulo cuyos lados miden **a unidades lineales** y **b unidades lineales** como se muestra en la figura a continuación:

Se define:
Perímetro de un rectángulo como: L = 2 a unidades + 2 b unidades = 2 (a + b) unidades.
Como la unidad de área en este caso es 1 m^2 que representa un cuadrito del geoplano de 1 m de lado, al contar los cuadritos que caben en el primer rectángulo, se observa que caben 10 cuadritos o unidades de área. Por lo que el rectángulo de dimensiones 5 m y 2 m, tiene un área A = 5 m x 2 m = 10 m^2. Para el segundo rectángulo puede verificar que caben 20 cuadritos, es decir, A = 5 m x 4 m = 20 m^2.

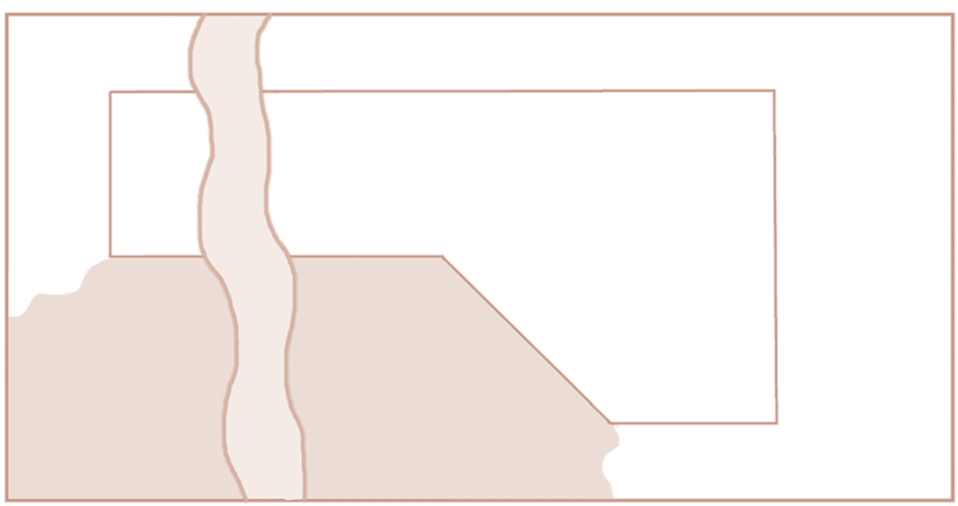
El concepto de área para un rectángulo cuyos lados miden a unidades y b unidades se generaliza como:

Área de un rectángulo = A = a unidades x b unidades, y ésta se da en unidades cuadradas.

ACTIVIDAD 5-7

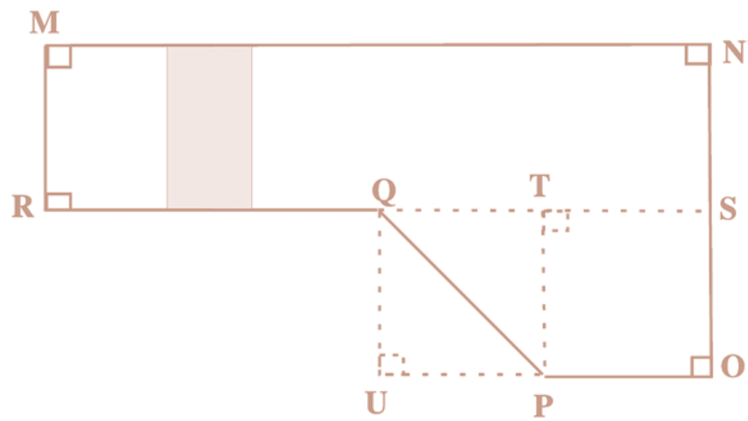
Una vista aérea nos permite observar formas cuadradas y rectangulares de áreas diferentes cuya existencia pasa inadvertida.

Como Ud. ya ha trabajado con el cálculo de área de figuras rectangulares y cuadradas, le proponemos la siguiente situación en la que se presenta la fotografía de una vista aérea de una finca de la región centroamericana, atravesada por un río de 100 m de ancho y que desemboca en un pantano. El propósito de la actividad es calcular el área de la finca que puede ser sembrada.



Las dimensiones de la finca son las siguientes:

MN = 800 m; NO = 400 m; OP = MR = 200 m y QR = 400 m



Una de las alternativas para encontrar el área de la finca es la siguiente:
Se prolonga RQ hasta su intersección con NO y se denota el punto de intersección con S, se tiene dos figuras planas adyacentes: MNSR y QSOP.

El área del rectángulo MNSR está dada por:

$$A_1 = (MN)(NS) = 800 \text{ m x } 200 \text{ m} = 160\,000 \text{ m}^2$$

La región del rectángulo atravesada por el río de 100 m de ancho tiene un área aproximada de:

$$A_2 = 100 \text{ m x } 200 \text{ m} = 20\,000 \text{ m}^2$$

El área del rectángulo MNSR que puede ser sembrada es:

$$A_3 = A_1 - A_2 = 160\,000 \text{ m}^2 - 20\,000 \text{ m}^2 = 140\,000 \text{ m}^2$$

Para encontrar el área de la figura QSOP, que no es un rectángulo, se traza el segmento PT perpendicular a QS y se obtiene dos figuras TSOP y QTP. La figura TSOP es un cuadrado de lado igual a 200 m por lo que su área es:

$$A_4 = 200 \text{ m x } 200 \text{ m} = 40\,000 \text{ m}^2$$

La figura QTP es un triángulo rectángulo, se baja una perpendicular desde Q hasta la prolongación de OP, cuya intersección se denota por U y se obtiene QTPU que es un cuadrado de lado 200m, el área del triángulo QTP es la mitad del área del cuadrado QTPU:

$$A_5 = {}^\circ(200 \text{ m x } 200 \text{ m}) = 20\,000 \text{ m}^2$$

El área de la figura QSOP está dada por:

$$A_6 = A_4 + A_5 = 40\,000 \text{ m}^2 + 20\,000 \text{ m}^2 = 60\,000 \text{ m}^2$$

Luego el área por sembrar A es la suma del área del rectángulo MNSR que puede ser sembrada y que se denotó por A_3 más el área de la figura QSOP denotada por A_6, de donde:

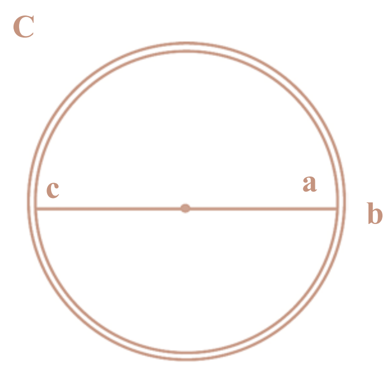
$$A = A_3 + A_6 = 140\,000 \text{ m}^2 + 60\,000 \text{ m}^2 = 200\,000 \text{ m}^2$$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: PERÍMETRO Y ÁREA DEL CÍRCULO

ACTIVIDAD 5-8

El avance de la tecnología ha proporcionado al ser humano nuevos medios para el almacenamiento de todo tipo de información. Uno de estos medios es el disco compacto, que es un pedazo de plástico cuya altura es de 1,2 mm. Tome un pedazo de hilo muy delgado que no sea elástico, como lo muestra la figura, denote por **a** uno de sus extremos:

Con el extremo **a** colocado en un punto fijo del borde del disco, recorra con el hilo el borde restante del disco hasta llegar al extremo inicial.



En ese momento corte el hilo dando lugar al extremo **b**; la longitud del segmento de hilo **ab** es la longitud **C** de la circunferencia del disco compacto y mide 37 cm aproximadamente. Si medimos desde el punto **a** al punto opuesto **c**, esta distancia mide 12 cm aproximadamente y se denomina diámetro del disco compacto. Se divide la longitud **C** de la circunferencia por el diámetro **D** del disco y se encuentra **C/D** = 3,08.

¿Habrá alguna relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro?. Para responder a esta pregunta le invitamos a estudiar los datos que aparecen en la tabla siguiente, producto de una experiencia con diferentes objetos, y con errores de medición por no contar con instrumentos precisos.

Objetos	C (circunferencia en cm)	D (diámetro en cm)	C/D
Base de una botella	57	18,5	3,08
Rueda de un auto	207	66	3,14
Base de un cilindro	17,65	6	2,94
Moneda de diez balboas	14	4,5	3,11
Aro de una canasta	78	25	3,12

Observe en la tabla que, al igual que en el disco compacto, los valores del cociente **C/D**, son muy próximos entre ellos, lo que parece indicar que existe una relación entre la longitud de la circunferencia y su diámetro. Se ha demostrado que esta relación es lo que se conoce como el número irracional π. Ahora bien, como el diámetro es igual a dos veces el radio, $\mathbf{D = 2r}$, donde **r** es el radio, entonces $\mathbf{C = 2\pi r}$.

El número π es el más célebre en la Historia de la Matemática; su primer valor: $\pi = 3$, se encuentra en la Santa Biblia, 1 Reyes 7, al construir Salomón un baño para los sacerdotes. Los babilonios lograron, posteriormente, una aproximación mejor; esto es: $3\frac{1}{8}$ y los egipcios utilizaban $(16/9)^2$. Arquímedes, al inscribir y circunscribir un polígono de 96 lados en un círculo, logró determinar que el número π está entre 3,1408 y 3,1428. Es importante señalar que en el año 1600, Ludolph Van Ceulen obtiene 34 decimales para ese número y que en 1882, F. Lindermann prueba la trascendencia de π; en 1976, J.Guilloud y M.
Bouyer logran obtener 10^6 decimales para π. Los primeros cincuenta decimales son:

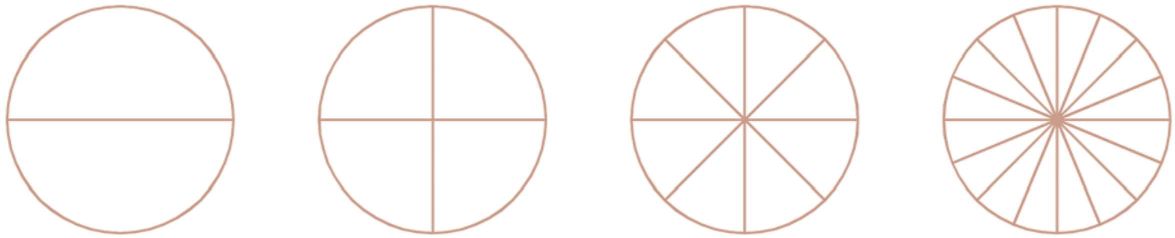
π = 3,141599265358979323846264338327950288419716939937510...

Generalmente se utiliza una aproximación de π con dos cifras decimales, $\pi = 3{,}14$ la cual se utiliza en esta obra.

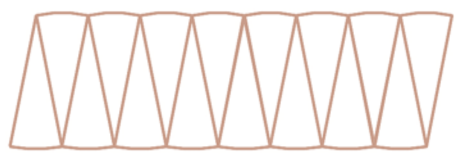
ACTIVIDAD 5-9

El profesor de Matemática, que forma un grupo de futuros docentes, debe preparar su clase sobre el área del círculo. Preocupado porque los alumnos construyan sus conocimientos les plantea la siguiente actividad:

Dibujen un círculo en papel de construcción y recórtenlo. Les pide que lo doblen por la mitad, obteniendo así dos semicírculos de igual área; luego lo deben volver a doblar y se tienen 4 sectores circulares, y deben repetir este procedimiento dos veces más. Esta secuencia se muestra en la siguiente figura:



Luego les solicita que recorten por cada uno de los dobleces (radios del círculo) y obtengan los 16 sectores circulares que se han formado. Los invita a que arreglen estos sectores de la siguiente manera:



Los alumnos observan que si hubiesen realizado más dobleces contarían con un mayor número de sectores circulares, de tal forma que se tiende a formar un rectángulo cuya altura es igual al radio del círculo dado y la base es la mitad de la longitud de la circunferencia, es decir π r

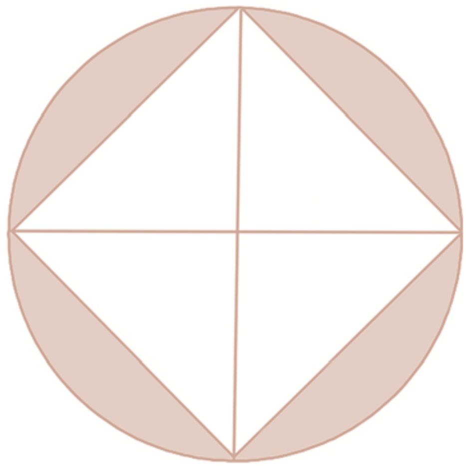
Si calculan el área de este rectángulo obtienen que: $A_c = (\pi r)(r) = \pi r^2$

Por lo que el área de un círculo de radio r es: $A_c = \pi r^2$

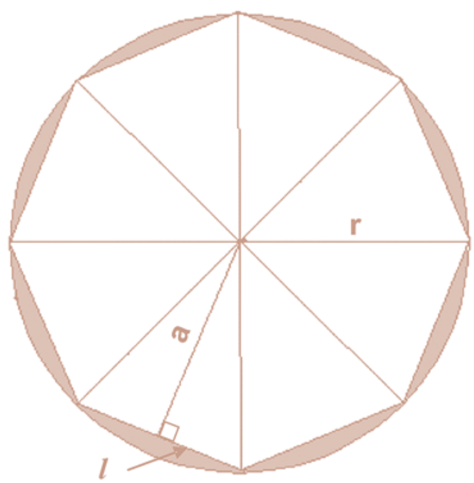
ACTIVIDAD 5-10

Otra actividad que puede realizar el profesor de Matemática para deducir la fórmula del área del círculo, es mediante la sucesión de áreas de polígonos inscritos en una circunferencia.

Consideremos una circunferencia de radio r y un cuadrado inscrito. Se observa que la diferencia entre el área del círculo y la del cuadrado es la región sombreada.



Si se quiere disminuir esta diferencia se inscribe un polígono del doble de lados, es decir, un polígono regular de 8 lados y se observa que la diferencia de áreas entre la del círculo y el polígono es menor. ¿Cuál es el área del polígono?



El polígono puede descomponerse en ocho triángulos isósceles congruentes.

La base del triángulo es el lado l del polígono y la altura **a** es la perpendicular trazada desde el centro del círculo al lado del polígono (lo que se conoce como apotema del polígono). Por lo que el área del triángulo es: $A = {}^\circ\ l \text{ x } \mathbf{a}$.
Se observa entonces que el área del polígono regular de 8 lados es la suma de las áreas de los 8 triángulos isósceles, congruentes en que se puede descomponer el polígono inscrito en la circunferencia.El área de un polígono regular de 8 lados es:

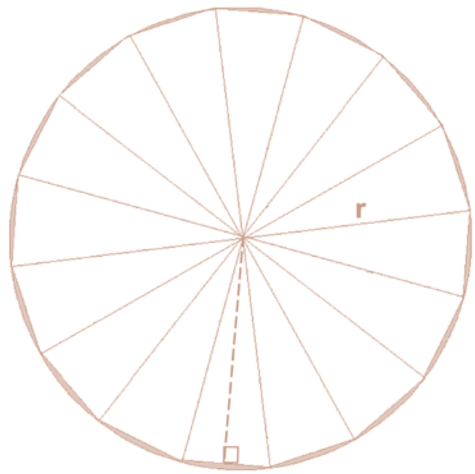
$$A_8 = 8\,({}^\circ\ l \text{ x a}) = {}^\circ\,(8 \text{ x } l) \text{ x a.}$$

Donde 8 x l es el perímetro P_8 del polígono, luego el área es el producto del semi-perímetro por la apotema, es decir, $A_8 = \frac{P_8}{2} \text{ x a}$

Se puede generalizar esta fórmula del área para un polígono regular de n lados, donde:

$$A_n = \frac{P_n}{2} \times a$$

Si se inscribe en la circunferencia un polígono regular del doble de lados del anterior, es decir, de 16 lados, la diferencia de áreas entre el área del círculo y el área del polígono será menor.



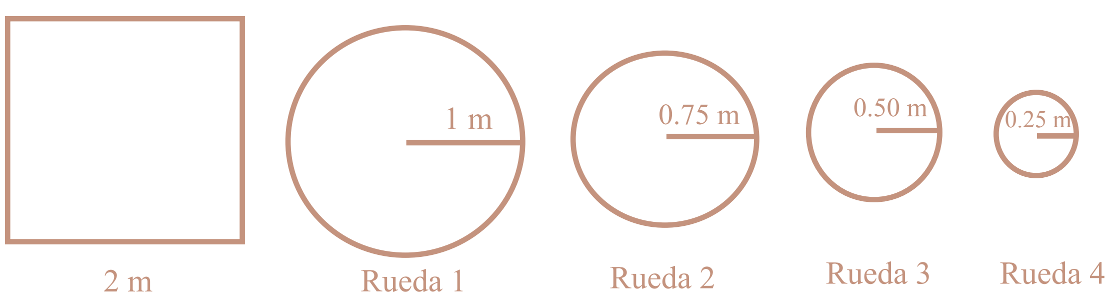
A medida que aumenta el número de lados del polígono, la diferencia entre el área del círculo y la del polígono se hace cada vez más pequeña; la apotema tiende al radio de la circunferencia y el perímetro del polígono P tiende a la longitud de la circunferencia. Por lo que el área del círculo tiende a:

$$A_c = \frac{P}{2} \times a = (2\pi r/2) \times r$$

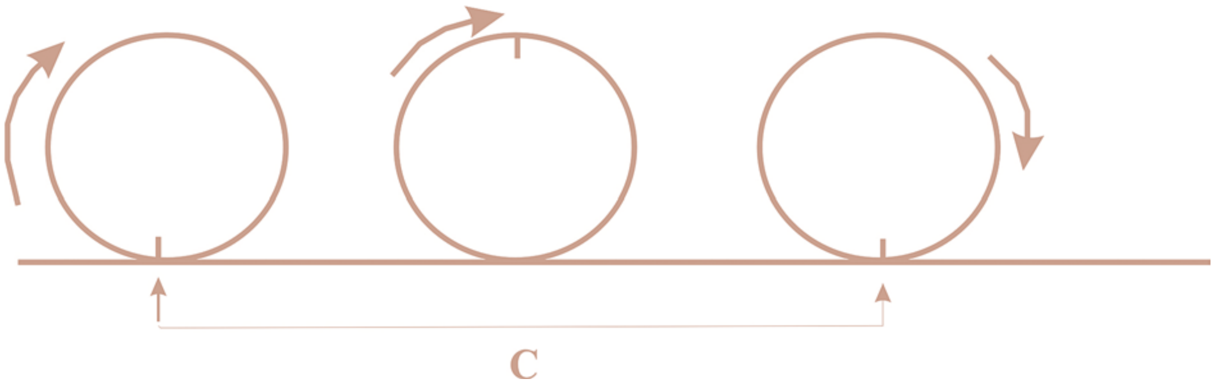
El área del círculo de radio r es: $A_c = \pi r^2$

ACTIVIDAD 5-11

Los maestros de una escuela organizan una actividad académica para sus alumnos sobre el tema relacionado con la longitud de la circunferencia o perímetro y área del círculo. Para ello disponen de un cuadrado y varias ruedas de hule de diferentes tamaños como se muestra enseguida:



Una de las actividades que deben desarrollar los estudiantes es calcular la longitud de la circunferencia de cada rueda mediante un giro sobre una superficie plana, con la ayuda de un dispositivo que deben fijar en la rueda y un metro de medir. En la gráfica se muestra cómo los estudiantes resuelven el problema:



Al medir la distancia que ha recorrido cada rueda sobre la superficie, cinco estudiantes encuentran que la longitud C de la circunferencia de cada rueda es la siguiente:

Estudiante	C de Rueda 1 en cm	C de Rueda 2 en cm	C de Rueda 3 en cm	C de Rueda 4 en cm
Nº1	6,0	4,75	3,0	1,52
Nº2	6,22	4,68	2,98	1,64
Nº3	6,0	4,82	3,33	1,72
Nº4	6,18	4,74	3,29	1,66
Nº5	6,32	4,69	3,18	1,54

Es importante que los maestros tengan presente que es probable que se encuentren diferentes valores de medidas, aún cuando lo que se mide permanezca igual.

Los maestros comparan los resultados de los estudiantes con sus cálculos, utilizando la fórmula de la longitud de la circunferencia ya conocida: $C = 2\pi r$.

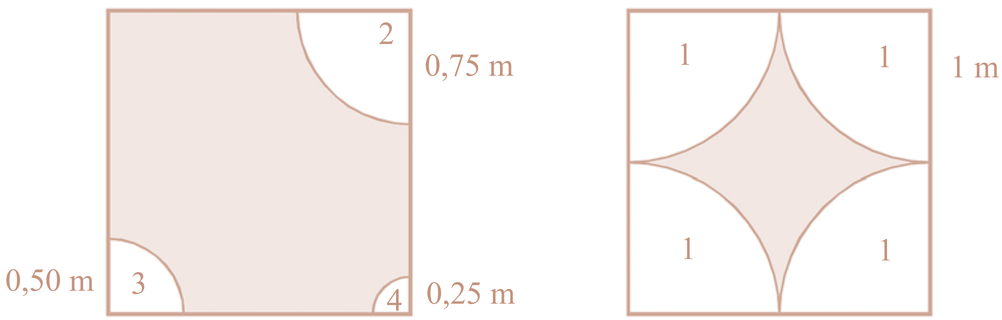
Ellos encuentran los valores de las longitudes de las circunferencias así:

Rueda 1: C = 2 x 3.14 x 1 m = 6,28 m
Rueda 2: C = 2 x 3.14 x 0.75 m = 4,71 m

Rueda 3: C = 2 x 3,14 x 0,5 m = 3,14 m
Rueda 4: C = 2 x 3,14 x 0,25 m = 1,57 m

Si comparamos las medidas encontradas por los estudiantes y las calculadas por los maestros vemos que difieren, pero que son aproximaciones al valor exacto de la medida de la circunferencia de cada rueda. Los maestros utilizan el valor de 3,14 como un valor aproximado del número π.

Como segunda parte de la actividad, los estudiantes deben mostrar sus destrezas, calculando áreas de figuras armadas con las ruedas y el cuadrado como las que se muestran a continuación:



Se trata de calcular el área de las regiones sombreadas. El área de un círculo es: $A = \pi r^2$, donde r es el radio del círculo. Así para la primera figura, se observa que la región 2 es un cuarto de un círculo de radio 0,75 m, de donde el área, $A_2 =$ x 3,14 x $(0{,}75\ m)^2 = 0{,}44\ m^2$. Para la región 3, su área $A_3 =$ x 3,14 x $(0{,}5\ m)^2 = 0{,}20\ m^2$.
La región 4 tiene un área $A_4 =$ x 3,14 x $(0{,}25\ m)^2 = 0{,}05\ m^2$. Por lo tanto, el área de la región sombreada es el área del cuadrado menos la suma de las áreas de las tres regiones, es decir:

$$A = 4\ m^2 - (0{,}44\ m^2 + 0{,}20\ m^2 + 0{,}05\ m^2) = 3{,}31\ m^2.$$

En la segunda figura la región sombreada tiene un área A que es la diferencia del área del cuadrado y cuatro veces el área del círculo de radio 1 m. Por lo tanto: $A = 4m^2 - 4 \times \frac{1}{4} \times 3{,}14 \times 1m^2 = 0{,}86\ m^2$

ACTIVIDADES DE APRENDIZAJE: RELACIONES ENTRE PERÍMETRO Y ÁREA

ACTIVIDAD 5-12

En la ACTIVIDAD 5-5 Ud. pudo observar que los rectángulos pueden tener iguales perímetros, pero diferentes áreas y que el cuadrado, tenía mayor área para igual perímetro. Este resultado ha sido estudiado por los maestros en formación, a quienes les causa cierta sorpresa, quizás porque un modelo implícito en el maestro y muy conocido es que dos cuadrados de igual perímetro tienen igual área y dos círculos de igual perímetro tienen igual área. Además para el cuadrado y el círculo, si aumenta el perímetro aumenta el área.

En efecto, si Ud. tiene un cuadrado de 3 cm de lado, su perímetro es 12 cm y su área es 9 cm^2. Si aumentamos el lado a 4 cm el perímetro pasa a ser 16 cm, su área 16 cm^2, es decir, el área aumenta. De igual forma, si un círculo de radio 2 cm se le aumenta su radio a 4 cm, se observa que su perímetro pasa de 4π cm a 8π cm. Su área varía de 4π cm^2 a 16π cm^2.

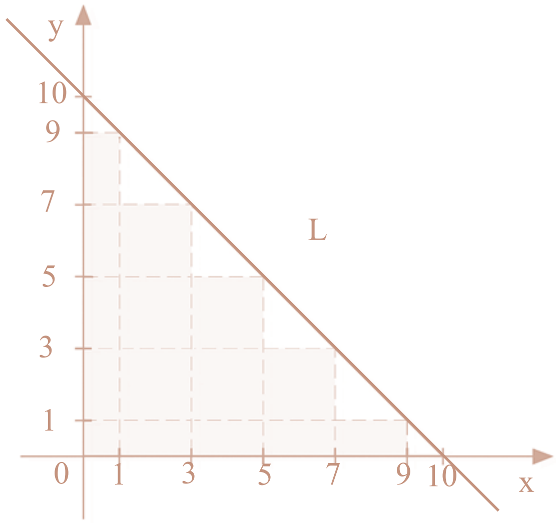
¿Será este resultado cierto para todas las figuras? ¿Podría dibujar una figura y aumentarle su perímetro pero que su área disminuya?

En esta actividad vamos a encontrar de otra manera, la ya conocida fórmula que relaciona la suma de los lados de un rectángulo con el semiperímetro, es decir, si un rectángulo tiene un lado de valor **x**, el otro lado de valor **y**, entonces **x + y = P/2**, donde **P** es el perímetro del rectángulo. Se dispone de un hilo de 20 cm de largo con el cual se construyen sucesivos rectángulos como se muestra en la figura.

A medida que varía el valor de la base que llamaremos **x** va variando el valor de la altura que llamaremos **y**, por lo tanto: **x** varía entre 0 y 10. Tome algunos casos de estos rectángulos construidos y coloque sus dimensiones, su perímetro y área en una tabla como se indica:

x en cm	y en cm	Perímetro en cm	Área en cm^2
9	1	20	9
7	3	20	21
5	5	20	25
3	7	20	21
1	9	20	9

En un sistema de coordenadas: se colocan los rectángulos que se seleccionaron para la tabla anterior, de manera que cada base **x** se inicie en el origen, quedando los rectángulos superpuestos, como se muestra en la figura.

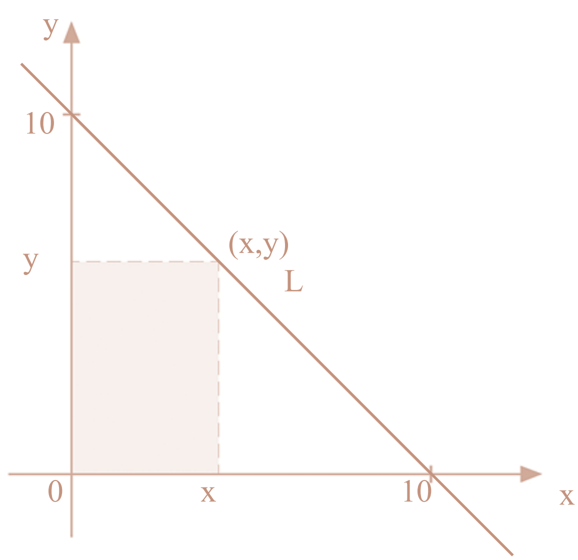


Observe que los vértices de los rectángulos quedan alineados y si los une se obtiene una recta L que pasa por los puntos (0,10) y (10,0).
La pendiente de una recta, dados dos puntos de ella, a saber, (x_1, y_1) y (x_2. y_2) es:

$m = (y_1 – y_2)/(x_1 – x_2)$, por lo tanto, la pendiente de la recta L es: **m = (10 – 0)/(0 – 10) = -1.**

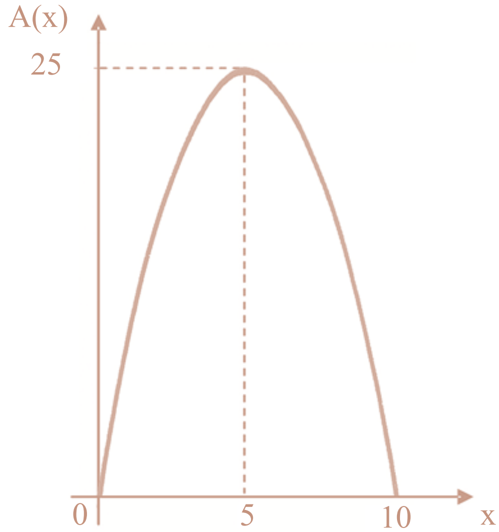
La ecuación de la recta de pendiente **m** y que pasa por los puntos (x, y) y (x_1, y_1) es $\mathbf{y – y_1 = m (x – x_1)}$. Así, la ecuación de la recta L que pasa por el punto (10, 0) y que tiene pendiente m = -1 es **y = -1(x –10) = -x + 10**, es decir, **y + x = 10**, donde 10 es el semiperímetro del rectángulo.

En la gráfica siguiente, Ud. puede observar que si toma un rectángulo cuya base es **x**, su altura **y**, de la secuencia construida con el hilo de 20 cm y lo coloca en la gráfica como se indica, se observa que su vértice correspondiente al punto (x,y) queda sobre la recta L, luego se tiene que x + y = 10.



Se ha demostrado que dado un rectángulo cuyas dimensiones son **x** y **y**, se tiene que **x + y = P/2,** donde **P** es el perímetro del rectángulo.

Interesa ver cómo varía el área del rectángulo, a medida que varían los lados del mismo. Se traza una gráfica del área en función de un lado del rectángulo, a saber, **x**. Se toman los valores que aparecen en la tabla anterior y se traza la gráfica, la cual se aprecia en la siguiente figura:

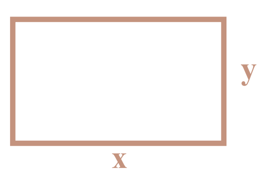


Se trata de la gráfica de una parábola. La ecuación general de la función cuadrática es $y = ax^2 + bx + c$, donde $a \neq 0$. Se observa que la gráfica corta el eje x en los puntos (0,0) y (10,0), su eje de simetría es la recta $x = 5$ y que $c = 0$. La ecuación del eje de simetría es $x = -b/(2a) = 5$ de donde $b = -10a$. Por lo tanto, la ecuación de la parábola $A(x) = ax^2 + bx = ax^2 - 10a\,x = ax(x - 10)$. Como $A(5) = 25$ como lo muestra la gráfica, y remplazando $x = 5$ en la ecuación de la parábola, se tiene:
$A(5) = 5a(5 - 10) = -25a = 25$ entonces $a = -1$. Como $b = -10a$ entonces $b = 10$. De donde, la ecuación de la parábola es: $A(x) = -x^2 + 10x = x(10 - x)$.

Observe en la gráfica, que el valor del área comienza a aumentar, cuando el valor de la base del rectángulo comienza a crecer, alcanzando el valor máximo para **x = 5 cm, o sea cuando se tiene un cuadrado**, y luego el área comienza a disminuir cuando x se acerca a 10 cm.

ACTIVIDAD 5-13

Como complemento de la actividad anterior, en ésta se generaliza la relación entre los rectángulos de igual perímetro y su área. Dado un rectángulo de dimensiones x y y



Se tiene que su perímetro P y área A son:

$P = 2(x+y)$ $\qquad\qquad\qquad\qquad$ $A = xy$

$\frac{P}{2} = x + y$

Sustituyendo $y = \frac{P}{2} - x$, en $A = xy$ se obtiene $A = x\ \frac{P}{2}(\quad - x)$.

Es decir, el área A es función de x:

$A = f(x) = x(\frac{P}{2} - x)$

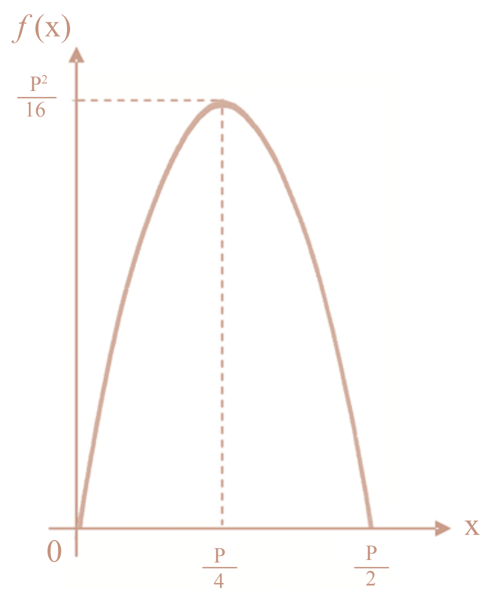
$\quad = -x^2 + \frac{P}{2}x,$

que como se observa, es una función cuadrática de la forma $f(x) = ax^2 + bx + c$, donde $a = -1$; $b = \frac{P}{2}$; $c = 0$. Su gráfica es una parábola con eje de simetría:

$$x = -\frac{b}{2a} = -\frac{\frac{P}{2}}{2\,(-1)} = \frac{P}{4}$$, además:

$$f\left(\frac{P}{4}\right) = -\left(\frac{P}{4}\right)^2 + \frac{P}{2}\left(\frac{P}{4}\right)$$

$$= \frac{P^2}{16}$$



La función área tiene como mayor valor $\frac{P^2}{16}$ y lo alcanza en $x = \frac{P}{4}$, como:

$y = \frac{P}{2} - x = \frac{P}{2} - \frac{P}{4} = \frac{P}{4}$

Resulta que $x = y = \frac{P}{4}$ de donde el rectángulo de mayor área es un cuadrado.

De los rectángulos de igual perímetro, el de mayor área es el cuadrado.

ACTIVIDAD 5-14

La directora de la escuela desea colocar una alfombra en el salón de actos y para esto tiene dos opciones: puede colocar una alfombra rectangular de dimensiones 3 m y 4 m, o una circular de 2 m de radio. La directora calcula el perímetro y el área que cubrirá cada una de las alfombras y observa que esto no es lo que desea, por lo que decide duplicar las dimensiones de cada tipo de alfombra. ¿Cuál es el perímetro y el área que se cubrirá con estas dos nuevas alfombras? ¿Cómo se afecta el perímetro y el área al duplicar las dimensiones?

El perímetro P_1 y el área A_1 de la alfombra rectangular de dimensiones 3 m y 4 m es:
$P_1 = 2 \text{ x } (3 \text{ m} + 4 \text{ m}) = 14 \text{ m}$ y $A_1 = 3\text{m x } 4\text{m} = 12\text{m}^2$
El Perímetro P_2 y el área A_2 de la alfombra con las dimensiones duplicadas es:
$P_2 = 2 \text{ x } (2\text{x}3 \text{ m} + 2\text{x}4 \text{ m})$
$= 2 \text{ x } [2 \text{ x } (3 \text{ m} + 4 \text{ m})]$
$= 2P_1$
$= 28 \text{ m}$
$A_2 = (2 \text{ x } 3 \text{ m}) \text{ x } (2 \text{ x } 4 \text{ m})$
$= 4 \text{ x } (3 \text{ m x } 4 \text{ m})$
$= 4 \text{ x } A_1$
$= 48 \text{ m}^2$

La alfombra de forma circular de radio 2m tiene perímetro P_3 y área A_3 igual a:
$P_3 = 2 \pi \text{ x } 2 \text{ m} = 12{,}56 \text{ m}$ y $A_3 = \pi \text{ x } (2 \text{ m})^2 = 12{,}56 \text{ m}^2$.
Al duplicar el radio de la alfombra el perímetro P_4 y el área A_4 son:
$P_4 = 2 \pi \text{ x } (2 \text{ x } 2 \text{ m})$
$= 2 \text{ x}(2 \pi \text{ x } 2 \text{ m})$
$= 2 \text{ x } P_3$
$= 25{,}12 \text{ m}$

$A_4 = \pi \text{ x } (2 \text{ x } 2 \text{ m})^2$
$= 4 \text{ x} \pi \text{ x } (2 \text{ m})^2$
$= 4 A_3$
$= 50{,}24 \text{ m}^2$

Se ha visto cómo, al variar la escala, las relaciones entre el perímetro y el área de los dos tipos de alfombra guardan distinta relación. Al duplicar las dimensiones de las alfombras rectangulares se duplicó el perímetro, en cambio, el área se cuadruplicó. Lo mismo sucedió con las alfombras circulares: al duplicar el radio se duplicó la longitud de la circunferencia y se cuadruplicó el área. ¿Y si se tuviera un cubo al que se le duplican sus dimensiones, cómo variará el volumen?

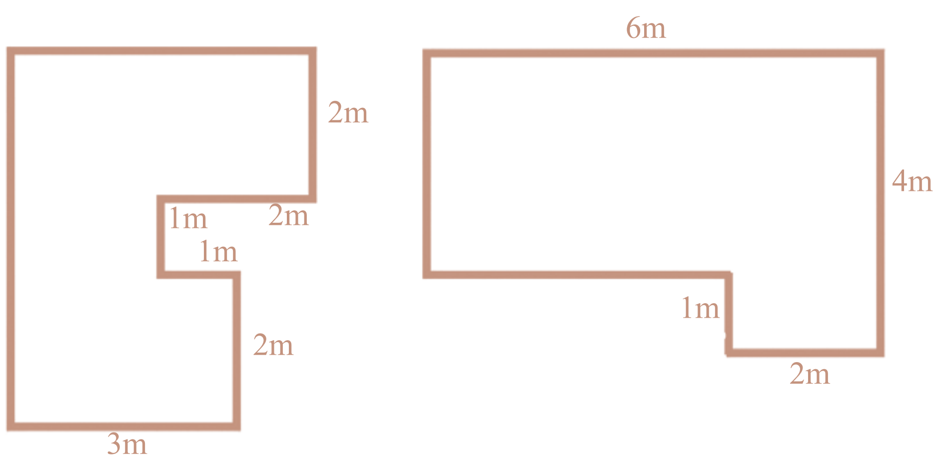
ACTIVIDADES DE EVALUACIÓN DEL APRENDIZAJE

I Reflexione si la situación descrita trata de utilizar perímetro, área o ambos conceptos

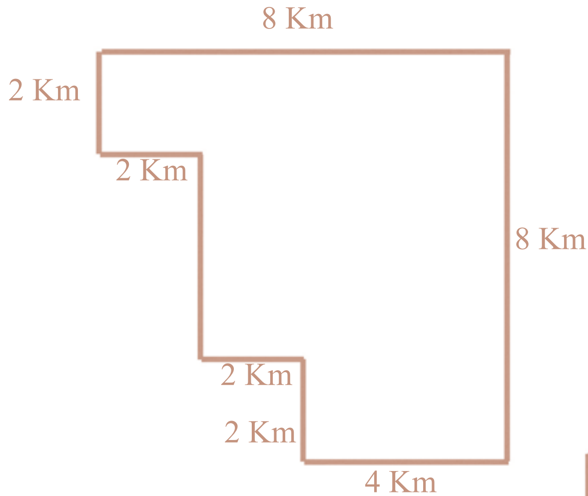
1-El maestro de Educación Física pide a los alumnos dar dos vueltas a la pista de baloncesto antes de iniciar su clase.
2-La directora de una escuela calcula los gastos para comprar alambre y cercar el jardín de la escuela.
3-El administrador de la escuela cotiza los gastos de pintura para pintar las paredes de la escuela.
4-Los maestros elaboran una bandera de su país y calculan la cantidad de tela necesaria.
5-La escuela necesita cambiar su techo, por lo tanto, es necesario comprar el material.
6-Llegaron baldosas para el piso de la escuela: ¿Cuántos se necesitan para cada salón?
7-Los alumnos de un equipo de la escuela llevan una cinta alrededor de su brazo, si 20 alumnos del equipo necesitan cinta, se debe comprar cinta para ellos.
8-En una escuela, los maestros y alumnos preparan una calle de honor para el Presidente de la República que los visita y desean colocar una alfombra a lo largo del pasillo de entrada a la escuela.
9-La maestra desea poner una cortina en la ventana del salón de clases.
10-Una empresa fumiga plantaciones de banano por medio de una aeronave y necesita calcular la cantidad de agroquímicos.

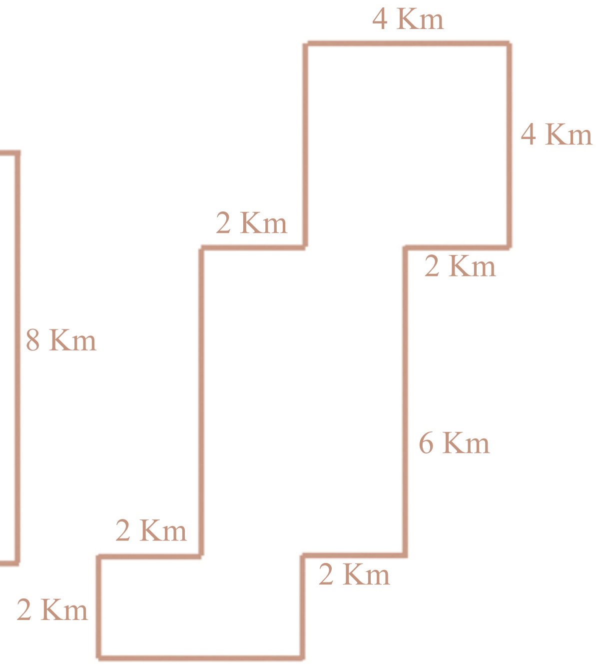
II Resuelva los siguientes problemas

1. ¿Podría Ud. averiguar cuántos metros de alambre se necesitan para cercar los dos terrenos representados en la figura? Calcule el área de cada terreno. ¿ A qué conclusión llega?

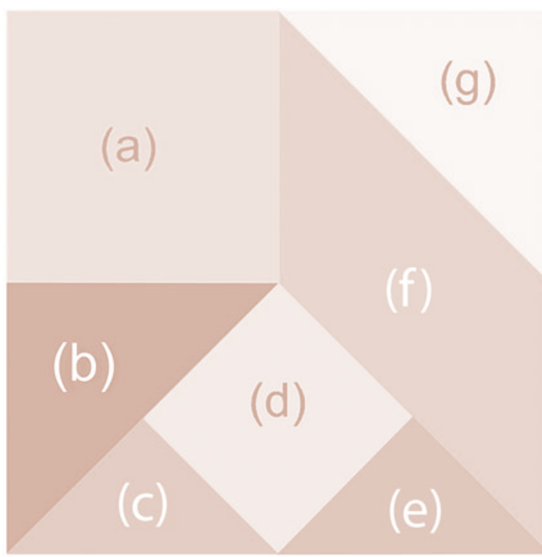


2. El Ministerio de Desarrollo Agropecuario desea hacer una inversión en dos grandes lotes de terreno para reforestar la Cuenca Hidrográfica. Necesitan lotes con igual superficie para sembrar árboles, pero que se utilice diferentes cantidades de alambres para la cerca de los mismos. Verifique si los dos lotes que el Ministerio tiene disponibles, representados en la figura, cumplen con las expectativas.





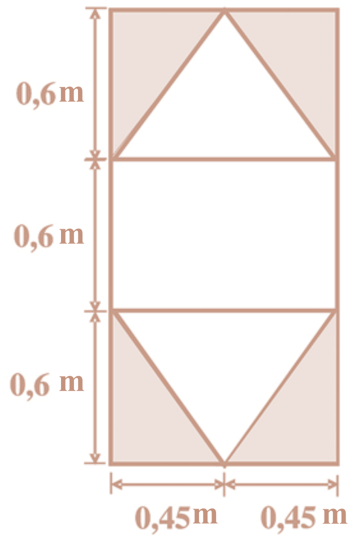
3. El Tangrama es un rompecabezas de forma cuadrada, formado por piezas geométricas, como se muestra en la figura a continuación:



Lo invitamos a realizar las siguientes actividades:

- Si el cuadrado (a) que contiene el Tangrama tiene un área de 4 cm^2, calcula el área de cada figura del Tangrama.
- Si el Tangrama tiene un área de 36 cm^2, calcula el área de cada figura geométrica.

4. María quiere poner vidrio en la ventana de su casa como se muestra en la figura. Calcula la cantidad de vidrio que necesita comprar María.



5. En cada caso se tiene un rectángulo de dimensiones a y b. Complete el siguiente cuadro con la respuesta correcta:

caso	a	b	Perímetro	Área
1	6cm	4cm		
2	8m		24m	
3	12m			$48m^2$
4			16cm	$16cm^2$
5			30m	$50m^2$

6. Un agrónomo necesita hacer un depósito de forma cilíndrica, que tenga 1 m de radio y 2 m de altura. El depósito es de hojalata; tiene tapa, pues, es para guardar granos. ¿Cuántos galones de pintura necesitará comprar el agrónomo para pintar el depósito por dentro y por fuera, si un galón de pintura cubre 3.5 m^2 de superficie?

7. Si se duplican las dimensiones de un rectángulo: ¿Cómo varía el área del rectángulo? Si se duplica la longitud de la circunferencia… ¿Cómo varía el área del círculo?

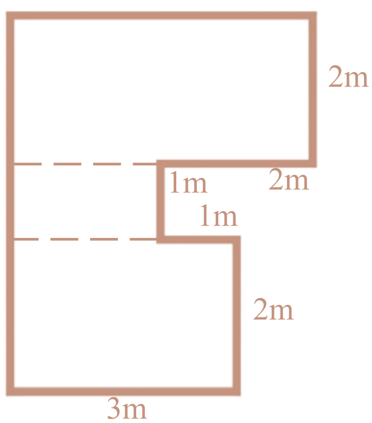
SUGERENCIAS DE SOLUCIÓN

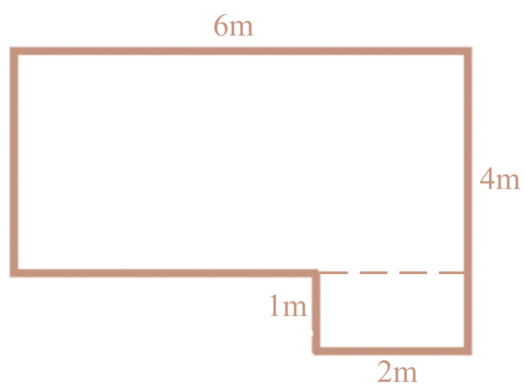
I. La primera parte de esta actividad tiene como objetivo evaluar si el concepto de perímetro y área ha sido adquirido a través de las actividades. Se quiere reflexionar sobre la situación descrita y analizar si se trata de la necesidad de calcular perímetro, área o ambos conceptos. Elabore una lista de actividades similares que describan el uso de los conceptos de perímetro y área.

II. Sugerencias para la solución de los problemas

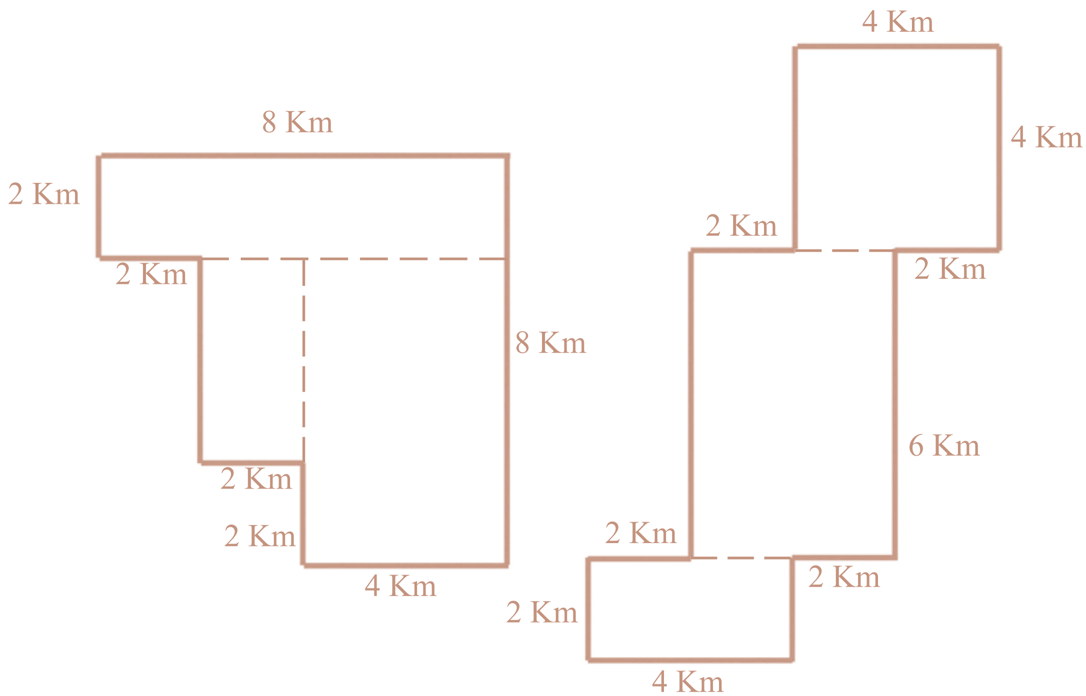
1. Para cercar el primer terreno se necesita 20 m de alambre. El área de este terreno se puede calcular descomponiendo la figura en tres rectángulos, como se muestra a continuación. Así el área total será de
2 m x 4 m + 2 m x 1 m + 2 m x 3 m = 16 m^2. El segundo terreno tiene un perímetro de 20 m. Se puede descomponer en dos rectángulos como se muestra en la figura, su área total será de 3 m x 6 m + 2 m x 1 m = 20 m^2.

Se observa que los dos terrenos requieren de la misma cantidad de metros de alambre para cercarlos porque tienen el mismo perímetro, pero, tienen diferentes áreas.



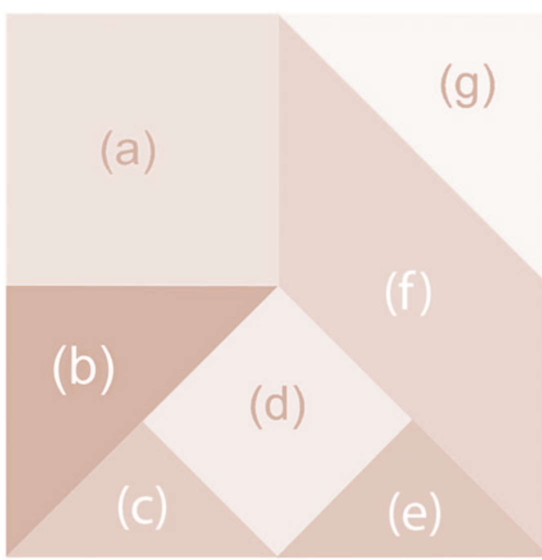


2. Las expectativas del Ministerio son las de contar con terrenos de una misma área, pero utilizando diferentes cantidades de alambres para cercarlos. El primer lote de terreno se puede descomponer de diferentes maneras: una forma es la que se muestra en la figura. Calculando el perímetro de este lote, se encuentra que mide 32 km. Su área es la suma de las áreas de los tres rectángulos, es decir: 2 km x 8 km + 4 km x 2 km + 4 km x 6 km = 48 km^2. El segundo lote de terreno tiene un perímetro de 40 km. Su superficie se descompone en la superficie de tres rectángulos. El área total del lote es 4 km x 4 km + 6 km x 4 km + 4 km x 2 km = 48 km^2. Los lotes de terrenos llenan las expectativas del Ministerio.



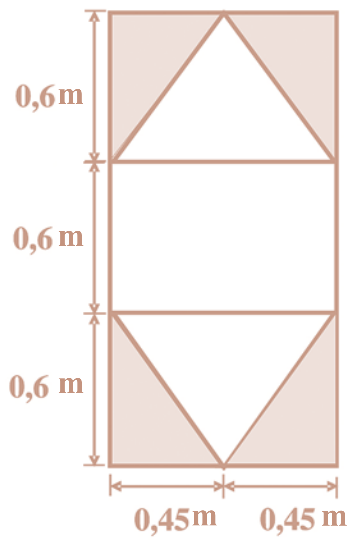
3. El área del cuadrado (a) mide 4 cm^2, que se denota $A(a) = 4\ cm^2$; se deduce por propiedades de los rectángulos que:

$A(b) = {}^{\circ}\ A(a) = 2\ cm^2$
$A(g) = {}^{\circ}\ A(a) = 2\ cm^2$
$A(c) + A(e) + A(b) = A(a) = 4\ cm^2$
$A(c) = A(e) = {}^{\circ}\ A(b) = 1\ cm^2$
$A(c) + A(e) = A(d) = 2\ cm^2$
$A(f) = 2\ A(g) = 4\ cm^2$



Para la segunda pregunta, basta darse cuenta de que si el área del Tangrama es 36 cm^2, el área del cuadrado (a) es de $\frac{36}{4}$ cm^2 = 9 cm^2 y luego se calcula el área del resto de las figuras como se hizo en la primera parte.

4. Una manera de calcular el área de la ventana es descomponiendo la superficie que se cubrirá con el vidrio, en un rectángulo y dos triángulos como se muestra en la figura:



El centro de la ventana es un rectángulo cuyo área A_1 = 0,6 m x 0,9 m = 0,54 m^2. Por otra parte, los dos triángulos son iguales, así que el área A_2 de uno de estos triángulos es: A_2 = 0,6 m x 0,9 m / 2 = 0,27 m^2. De donde el área de la ventana es: A = A_1 + 2A_2 = 0,54 m^2 + 2 x 0,27 m^2 = 1,08 m^2. María necesita comprar 1,08 m^2 de vidrio para su ventana.

5. Las sugerencias que se hacen en este ejercicio son:

1. El perímetro de un rectángulo de lados **a** y **b** está dado por P = 2a + 2b, y el área A = a x b por lo que en este caso: P = 2(6 cm) + 2(4 cm) = 20 cm y el área A = 6 cm x 4 cm = 24 cm^2.

2. P = 2(a + b); luego P/2 = a + b como a = 8 m reemplazando se tiene 24 m/2 = 8 m + b y despejando b; 12 m - 8 m = b = 4 m. El área A = 8 m x 4 m = 32 m^2.

3. El área A =a x b = 48 m^2, de donde b = 48 m^2/a , reemplazando a por su valor se obtiene b = 48 m^2/12 m = 4 m . Luego el perímetro del rectángulo es: P = 2(12 m) + 2(4 m) = 32 m.

4. El semiperímetro es P/2 = a + b y el área A = axb. Entonces, lo que se debe encontrar son dos números que sumados den 8 y multiplicados 16. Estos números son 4 y 4. Por lo que: P = 2(4 cm) + 2(4 cm) = 16 cm y A = 4 cm x 4 cm = 16cm^2. Se trata, pues, de un cuadrado de lado 4 cm.

5. El análisis del problema es igual al del punto anterior, por lo que se debe encontrar dos números que sumados den 15 y multiplicados 50. Estos números son 10 y 5. Verificando: P = 2(10 m) + 2(5 m) = 30 m y el área A = 10 m x 5 m = 50 m^2.

6. Es necesario descomponer el cilindro en un rectángulo y dos círculos con las siguientes dimensiones:

El área total que se desea pintar es igual al doble del área del rectángulo, ya que se pintará por dentro y por fuera, más cuatro veces el área del círculo de la base, ya que hay que considerar que no sólo se pinta la base por dentro y por fuera, sino también que lleva tapa. Luego el área que se pintará es: 2(2π x 1 m)(2 m) + 4(π x 1 m^2) = 25,12 m^2 + 12,56 m^2 = 37,68 m^2. Para encontrar el número de galones de pintura que se necesita divide el área que se pintará entre el área que cubre cada galón y se encuentra que se necesitan 10,76 galones de pintura. Por lo que el agrónomo debe comprar 11 galones de pintura.

7. El área de un rectángulo de dimensiones a y b es A_1 = a x b. Si se duplican las dimensiones, se tiene que las nuevas dimensiones del rectángulo son 2a y 2b, de donde el área A_2 = 2a x 2b = 4(a x b) = 4 A_1. Se observa que el área se ha cuadruplicado.

Una circunferencia de radio r tiene una longitud $C_1 = 2\pi r$, si se duplica su radio la nueva circunferencia tendrá una longitud $C_2 = 2(2\pi r)$, de donde se tiene que $C_2 = 2C_1$. Así se tiene que la longitud de la circunferencia se duplica al duplicar el radio de la misma. El área de la circunferencia de radio r es: $A_1 = \pi r^2$, el área de la circunferencia de radio 2r es $A_2 = \pi(2r)^2 = 4\pi r^2 = 4\,A_1$. Se observa que al duplicar el radio de la circunferencia se cuadruplica el área del círculo.

blanca

REFERENCIAS

Agard, E., Ardila, A. & Castillo, G. (1998). **La Didáctica de la Matemática en el marco de la Didáctica de las Ciencias y la formación de profesores.** En **Hacia una educación panameña en el siglo XXI**. Panamá. UNESCO. (pp. 155- 168).

Alarcón, J. et al. (1981). **Matemática 100 horas**. México. Fondo Educativo Interamericano, S.A.

Alarcón J., et al. (1995). **Libro para el maestro. Matemáticas**. México. Secretaria de Educación Pública. SEP.

American Association for the Advancement of Science. (1997). **Ciencia: Conocimiento para todos**. Proyecto 2061. México. Oxford University Press. Harla. Traducción.

American Association for the Advancement of Science. (1998). **Avance en el conocimiento científico**. Proyecto 2061. México. Oxford University Press. Harla. Traducción.

Ardila, A. (2002). **El lenguaje matemático y el usual como mediador de la comunicación. En Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 15**. t.2 México, Editorial Iberoamérica.

Baldor, A. (1986). **Geometría**. Madrid. Ediciones y Distribuciones Códice, S.A.

Barnet, R. (1993). **Geometría**. México. Ediciones Mc.Graw-Hill.

Bedoya, H., & Londoño, N. (1993). **Matemática I**. Colombia. Grupo Editorial Norma.

Bedoya, H.,& Londoño, N. (1993). **Matemática II**. Colombia. Grupo Editorial Norma.

Behr, M. (1990). **Rational Number, Ratio, Proportion.** En Acquisition of Mathematical concepts **and processes**. New York. R. Lesh, (Ed.). Academic Press. (pp. 99-126).

Bell, A.W. (1976). **A Study of pupils proof- explanations in mathematical situations**. **Educational Studies in Mathematics, 7**. U.S.A. (pp. 23-40).

Bell, E. (1992). **The Devolpment of Mathematics**. New York. Dover Publications, Inc.

Bourbaki, N. (1968). **Elements of Mathematics: Theory of Sets.** París. Hermann.

Boyer,C. (1987). **Historia de la Matemática**. Madrid. Alianza Editorial. Textos.

Bunt, L., Jones, P. & Bedient, J. (1988). **The Historical Roots of Elementary Mathematics**. New York. Dover Publications Inc.

Casado, S. (2002, junio 15). **Los Sistemas de Numeración a lo largo de la Historia.** (En línea) <http://thales.cica.es/rd/Recursos/rd97/Otros/SISTNUM.html

Castillo, G. de (2001). **Una alternativa para el mejoramiento de la enseñanza y el aprendizaje de la Ciencia, Matemática y Tecnología en Panamá.** Proyecto 2061. En **Acta Latinoamericana de Matemática Educativa. Vol. 14**. México. Grupo Editorial Iberoamérica. Clame. (pp. 84-88).

Catalá, C. (1995). **Invitación a la Didáctica de la Geometría**. España. Colección Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis.

Cisar, L. & Sánchez, M. (1990). **Fracciones.** España. Colección Cultura y Aprendizaje. Editorial Síntesis.

Cohen, H. (1995). **Les Nombres Premiers. La Recherche 278**. París. (pp. 760-765).

Collette, J. (1986). **Historia de las Matemáticas. Vol. I**. México. Siglo XXI.

Crowley, M. (1987). **The Van Hiele Model of the Development of Geometric Thought. Learning and Teaching Geometry,** K – 12. E.U.A. **N.C.T.M.** (pp. 1-16).

Chevallard, Y., Bosch, M. & Gascon, J. (1997). **Estudiar Matemáticas. El eslabón perdido entre enseñanza y aprendizaje**. España. Instituto de Ciencias de la Educación. Universidad de Barcelona.

De León Pérez, H. (1999). **Procedimientos de niños de primaria en la solución de problemas de reparto.** En **Relime. Vol. 1 Núm. 2.** México. CLAME. Thomson Editores. (pp. 5 -28)

Dickson, L., Brown, M. & Gibson, O. (1991). **El aprendizaje de las matemáticas**. España, Ediciones Labor.

Edwards, C. (1979). **The Historical Development of the Calculus**. New York. Springer-Verlag.

Eraut, M. (1972). **Fundamentos de Aritmética**. México. McGraw Hill.

Femena, E. et al. (1992). **Teacher's Knowledge and Its Impact**. En **Handbook of Mathematical Teaching and Learning**. U.S.A. D. Grouws (Ed.).

Filloy, E. (1998). **Didáctica e Historia de la Geometría Euclidiana**. México. Serie Cultura y Matemáticas. Colección Sociedad Mexicana de Matemática Educativa. Grupo Editorial Iberoamérica.

Fiol, M. & Fortuny, J. (1990). **Proporcionalidad directa. La forma y el número**. Colección Cultura y Aprendizaje. Madrid. Editorial Síntesis.

Fuson, K. (1984). **Research on Whole Number Addition and Subtraction**. En **Matemáticas y Educación: retos y cambios desde una perspectiva internacional**. España. Editorial GRAO. Serie Matemática.

Gómez, B. (1993). **Numeración y Cálculo**. nº 3. Madrid. Editorial Síntesis.

Greer, B. (1984). **Multiplication and Division as Models of Situations**. En **Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning**. U. S. A. D Grouws (Ed).

Gutierrez, A. & Jaime, A. (1991). **El Modelo de Razonamiento de Van Hiele como marco para el aprendizaje comprensivo de la Geometría.** Un ejemplo: Los Giros. En **Revista Educación Matemática. Vol. 3 Num. 2**. México Editorial Iberoamericana. (pp. 49-65).

Hart, K. M. (1981). **Fracciones.** En **Children' s Understanding of Mathematics**. U.S.A. K.M. Hart (ed). (pp. 11 – 16)

Halmos, P. (1974). **Naive Set Theory**. New York. Springer Verlag.

Heath, T. (1960). **A History of Greek Mathematics Vol. I and II.** U.S.A. Oxford, University Press.

Heath, T. (1956). **Euclid: The Thirteen Books of Elements Vol. I**. New York. Dover Publications. Inc.

Jensen, R. (1992). Research ideas for the classroom early childhood mathematics. U.S.A. **National Council of Teachers of Mathematics.**

Kline, M. (1982). **Mathematics. The Loss of Certainty**. U.S.A. Oxford University Press.

Kuhn, T.(1971). **La Estructura de las Revoluciones Científicas.** México. Fondo de Cultura Económica.

Lovell, K. (1986). **Desarrollo de los conceptos básicos matemáticos y científicos en los niños**. España. Ediciones Morata.

Marcano, G., Pérez, A.,& Carrera, I. (1995). **Carpeta de Matemática para docentes de Educación Básica**. Venezuela. CENAMEC.

Martínez, A., & Rivaya, F. (Coordinadores). (1989). **Metodología activa y lúdica de la Geometría**. España. Colección Matemáticas: cultura y aprendizaje. Editorial Síntesis.

Orton, A. (1990). **Didáctica de la Matemática**. España. Ediciones Morata.

Peralta, T. (1993). Fundamentación teórica para un curso sobre suma y multiplicación de fracciones. En **Memoria de la Séptima Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa**. Panamá. Imprenta Universitaria. Universidad de Panamá. (pp. 421- 425).

Peralta, T. & Valdemoros, M. (1991). Traducción de una suma de fracciones, del lenguaje gráfico al simbólico aritmético. En **Memorias de la Quinta Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa**. Honduras. INICE (pp. 23-28).

Perero, M. (1994). **Historia e Historias de Matemáticas**. México. Grupo Editorial Iberoamérica.

Quintero, A. (1994). **Geometría**. Puerto Rico. Editorial de la Universidad de Puerto Rico.

Quintero, A. (1988). **Representaciones en la Enseñanza de Matemáticas**. Puerto Rico. Editorial de la Universidad de Puerto Rico.

Ribenboim, P. (1996). Catalan´S Conjeture. **American Mathematical Monthly 103**, (pp. 529-538).

Robins,G.& Schute,C. (1987). **The Rhind Mathematical Papyrus :an Ancient Egiptian Text**. New York. Dover Publicatios, Inc.

Smith, D. (1958). **History of Mathematics.** Vol.ll. New York. Dover Publications, Inc.

Thompson, J. E. (1982). **Aritmética.** México. UTEHA.

Wilson, P. & Rowland, R. (1992). **Teaching Measurement.** En Research Ideas for the class-room, early childhood mathematics. New York. NCTM.

Valdemoros, M. (1994). **Fracciones, referentes concretos y vínculos referenciales.** Memoria de la **Octava Reunión Centroamericana y del Caribe sobre formación de profesores e investigación en Matemática Educativa**. Costa Rica. UNED. (pp. 21-30).

Este libro se terminó de producir
en el mes de febrero del 2009
en los talleres gráficos de
EDITORAMA, S.A.
Tel.: (506) 2255-0202
San José, Costa Rica

Nº 20,000

blanca